

Eine Anwendung von Spline-Verfahren zur DGM-Ausdünnung

OLGA WÄLDER & MANFRED F. BUCHROITHNER, Dresden

Keywords: cartography, digital terrain model (DTM), spline-method, Bezier-splines

Zusammenfassung: Ein spezielles Ausdünnungsverfahren für digitale Geländemodelle wird vorgestellt. Es reduziert in erster Linie den Speicheraufwand. Außerdem erhält es optimal die Struktur des ursprünglichen DGM für weitere Anwendungen. Als Ergebnis dieser Ausdünnung wird eine spezielle „Skin-Struktur“ des realen Georeliefs erzeugt. Zwei unterschiedliche Ansätze zur Modellierung der Stützpunkte dieser Skin-Struktur werden diskutiert. Diese einfachen und effizienten Ansätze werden am Beispiel zweier simulierter Oberflächen getestet und verglichen.

Summary: *An application of spline-methods for the thinning of digital terrain models.* A special method for thinning of digital terrain models is proposed. On one hand it helps to reduce the memory resources, on the other hand this approach optimally reproduces the original structure of the original DTM. As a result of this thinning we obtain a special „skin-structure“ of the real georelief. Two different methods for modeling the sampling points of this skin-structure are discussed. These simple and efficient approaches are applied to two simulated surfaces and the results are compared.

1 Problemstellung

Im Rahmen des Teilprojektes „Entwicklung und Anwendung von Methoden für die dreidimensionale Visualisierung der Marsoberfläche aus HRSC-Daten“ des Projektes „Mission Mars Express“ (MEX), unterstützt vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), soll die Entwicklung bzw. Adaption von Methoden zur Visualisierung dreidimensionaler kartenverwandter Darstellungen auf der Basis von Daten der High Resolution Stereo Camera (HRSC) realisiert werden.

Die zu entwickelnden Methoden und Algorithmen dienen der prototypischen Erstellung von 3D-Karten. Die Relieferfassung der Marsoberfläche mittels HRSC ermöglicht eine verbesserte Darstellung morphologischer Formen und Zusammenhänge. Die Mission zum Planeten Mars ist für Ende 2003 geplant. Daher sollen die zu entwi-

ckelnden Ausdünnungsverfahren für die Reliefdaten zuerst an simulierten und später an realen Geo-Oberflächen getestet werden.

Ein optimiertes 3D-Netz, basierend auf den 3D-Punkten des aus HRSC-Daten abgeleiteten Geländemodells, soll generiert werden. Dazu wird eine spezielle Ausdünnung des DGM durchgeführt, die zu einer erheblichen Minimierung des Speicheraufwandes führt. Unter einem optimierten 3D-Netz ist in diesem Zusammenhang eine topologische Struktur aus einzelnen 2D-Flächen zu verstehen, welche das gegebene Gelände morphologisch ausreichend genau, d.h. die wesentlichen Gerippelinien berücksichtigend, und mit minimiertem Speicherbedarf abbildet.

2 Diskussion der Verfahren

Bei einer Polynomdarstellung einer Oberfläche wird die Z-Koordinate als Funktion

der Grundrisskoordinaten X, Y berechnet, KRAUS (2000), RENKA (1998):

$$Z = Z(X, Y) = a_1 + a_2X + a_3Y + a_4XY + a_5X^2 + \dots \quad (1)$$

Dabei werden die unbekanntenen Koeffizienten aus der folgenden Matrixgleichung bestimmt:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & X_1Y_1 & \dots \\ 1 & X_2 & Y_2 & X_2Y_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_n & Y_n & X_nY_n & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (2)$$

oder $\underline{Z} = \underline{B}a$, also $\underline{a} = (\underline{B}^T \underline{B})^{-1} \underline{B}^T \underline{Z}$

Eine eindeutige Lösung von (2) kann ganz offensichtlich dann erreicht werden, wenn die Anzahl der unbekanntenen Variablen a_1, a_2, \dots und die Anzahl der Spalten und Zeilen in der Matrix B identisch ist. Wenn man nur von den z -Werten an vier Stützpunkten ausgeht, dazu aber als Zusatzinformation jeweils die zwei partiellen Ableitungen nach x und y an diesen Punkten bestimmt, dann können in der Polynomdarstellung (1) die Koeffizienten a_1, a_2, \dots eindeutig bestimmt werden, wie es schematisch in (3) dargestellt ist:

$$\underline{z} = [1, x, y, xy, x^2, y^2, \underline{y^3}, x^2y, xy^2, x^3y, xy^3]^T, \\ z(x, y) = \underline{z}^T \cdot \underline{1}, \\ \underline{a} = [a_1, \dots, a_{12}],$$

dann

$$Z(x, y) = \underline{z}^T \cdot \underline{a} \quad \text{und}$$

$$\begin{bmatrix} z(x_i, y_i) \\ \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(x_i, y_i) \\ \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_i \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

für $i = 1, \dots, 4$.

(3)

Auf ähnlichen Prinzipien werden die sogenannten *Bezier-Patches*, *B-Splines* oder *Bezier-Splines* aufgebaut, FARIN (1994). In dieser Darstellung werden zusätzliche Informationen über die erste und höhere Ableitungen in den Stützpunkten berücksichtigt. Dies führt dazu, dass stetige und differenzierbare Übergänge zwischen Bezier-Flächen geschaffen werden können. Darstellung (3) bezeichnen wir weiterhin als *Bezier-Fläche*. Bei Einbindung zusätzlicher Information mittels Bruchkanten werden rechteckige Maschen durch trapezförmige ersetzt. In diesem Fall wird nur die Stetigkeit der Übergänge an den Kanten verlangt.

Nun soll dieser Ansatz zur Modellierung eines optimierten 3D-Netzes verdeutlicht werden. Wir setzen die Existenz eines digitalen Geländemodells voraus. Es soll mittels einer Approximation durch Bezier-Flächen so dargestellt werden, dass einerseits eine Minimierung des Speicherbedarfs gewährleistet und andererseits der vorgegebene Genauigkeitsrahmen auch ohne explizite Integration von Bruchlinien eingehalten wird. Es werden zwei Ansätze zur Modellierung der Stützpunkte eines solches 3D-Netzes diskutiert: Eine *totale Filterung* und eine nach bestimmten Optimalitätskriterien *gesteuerte Auswahl* von Punkten des DGM. Beide Modelle liefern als Ergebnis eine Transformation der Grundebene XY in eine räumliche Fläche.

Totale Filterung. Ein Raster-DGM soll auf ein gröberes Gitter projiziert werden. Alle vier Punkte einer Masche $ACBD$ erhalten ihre Z -Werte folgendermaßen (siehe Abb. 1). Im benachbarten Bereich wird der Z -Wert für Punkt A (B, C, D analog) als der gewichtete Mittelwert der Z -Werte der dort platzierten Punkte des DGM (in Abb. 1 mit „ x “ gekennzeichnet) gebildet. Die Bestimmung dieser Gewichte wird unten diskutiert. Auf dieses gröbere Gitter werden dann Bezier-Flächen mit stetigen und differenzierbaren Übergängen angepasst. Die partiellen Ableitungen für Punkt A (B, C, D analog) werden durch die Differenz der gewichteten Mittelwerte der Z -Werte der Punkte, die in den entsprechenden Hälften

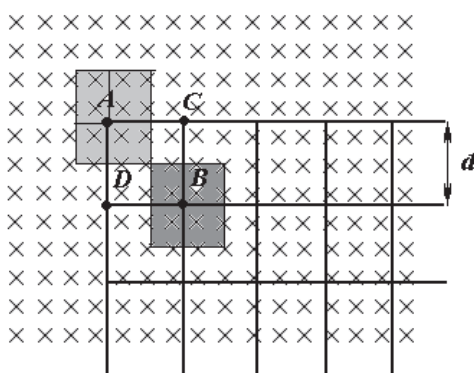


Abb. 1: Zur Ausdünnung des DGM.

des gekennzeichneten Bereiches liegen, berechnet, vgl. MENZ (1998):

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \approx \frac{E_r - E_l}{d/2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} \approx \frac{E_o - E_u}{d/2}.$$

d bezeichnet hier die Breite des groben Gitters, E_r, E_l, E_o, E_u sind die Mittelwerte der Z -Werte in den rechten, linken, oberen und unteren Halfen des in Abb. 1 gekennzeichneten Bereichs.

Anschließend wird die gesamte absolute Abweichung der wahren Z -Werte der Punkte aus dem DGM von den mittels der angepassten Bezier-Fläche geschätzten Werten berechnet. Liegt diese Abweichung im zulässigen, a priori vorgegebenen, Genauigkeitsbereich, so wird die Masche mit den Polynomkoeffizienten $a_i, i = 1, \dots, 12$ der entsprechenden Bezier-Fläche abgespeichert, vgl. (3). Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt wird, so wird die betroffene Masche bei der nächsten Schleife des Algorithmus nochmals „geviertelt“.

Die gewichteten Mittelwerte können auf unterschiedliche Weise berechnet werden. Als häufig verwendetes diskretes Verfahren soll hier die Methode der inversen Distanzen erwähnt werden. In etwas allgemeinerer Form lässt sich die Gewichtung hierbei folgendermaßen darstellen:

$$w_i = \frac{F(d_i)}{W}, W = \sum_{i=1}^n w_i, i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

$F(d_i)$ ist ein Einflussfunktional, d_i stellt den Abstand zwischen dem i -ten Punkt und der Stelle, an der geschätzt werden muss, dar, n ist die Anzahl der bei der Schätzung berücksichtigten Punkte. Im Fall der gewöhnlichen Methode der inversen Distanzen benutzt man ein Einflussfunktional der Form

$$F(d_i) = \frac{1}{d_i^2}, i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Der maximal mögliche Abstand zwischen den Punkten kann die „natürliche“ Grenze des Definitionsbereiches des Einflussfunktionales beschreiben. Der mit zunehmendem Abstand nachlassende Einfluss lässt sich beispielsweise mit einer monoton fallenden exponentiellen Funktion darstellen.

Gesteuerte Auswahl von Punkten des DGM.

Es sei angenommen, dass bezuglich der Daten eines DGM außer den Koordinaten keine weiteren Beziehungsverhaltnisse (Höhen- oder Gerippelinien) abgeleitet werden sollen, da dies zusätzlichen Rechenaufwand erfordert. Eine Verdünnung muss dann so ablaufen, dass man in einer Gruppe von Punkten den „wichtigsten, unverzichtbarsten“ entdeckt. Die Fähigkeit des ausgewählten Punktes, die Struktur seiner Gruppe widerzuspiegeln, kann berücksichtigt werden.

Ein bekanntes Kriterium für eine solche Auswahl stellt die so genannte Entropie dar. Bei dieser gibt es durchaus unterschiedliche Definitionen. In der Stochastik wird die Entropie auf der Basis der Verteilung einer Zufallsgröße eingeführt. Von den diskreten Verteilungen liefert die Gleichverteilung den maximalen Wert der Entropie, unter den stetigen Verteilungen stellt die Normalverteilung als Extremfall den Fall vom maximalen Chaos dar. Im Fall einer deterministischen Betrachtungsweise muss nach einem Maß gesucht werden, welches den Informationsgehalt jedes Punktes in der Gruppe erfasst. Jener Punkt, der mittels seiner Nachbarpunkte am schlechtesten geschätzt werden kann, wird als der erkannt, welcher am not-

wendigsten ist, auf den somit nicht verzichtet werden kann. Zum Beispiel kann dies der Punkt mit dem maximalen Schätzfehler, bestimmt durch eine Cross-Validation, sein.

Auf der Grundlage des Entropieansatzes, vgl. SHANNON & WEAVER (1963), kann ein Entropie-Maß in der folgenden Form abgeleitet werden:

$$e = \frac{1}{\max(\sigma_i)}, \quad i = 1, \dots, n(M) \quad (7)$$

mit

$$\sigma_i = (Z_i - \hat{Z}_i)^2, \quad (8)$$

wobei \hat{Z}_i ein Schätzwert für den wahren Z_i -Wert auf der Basis der Z -Werte der übrigen Maschenpunkte einer Masche M des Gitters ist, und $n(M)$ die Anzahl der Punkte dieser Masche darstellt.

Nun ist derjenige Punkt in dem Punkt A benachbarten Bereich (siehe Abb. 1) zu finden, bei dem die Schätzvarianz σ_i aus (8) den maximalen Wert annimmt. Dann wird der Z -Wert dieses Punktes als der Schätzwert für den entsprechenden Stützpunkt A der Bezier-Fläche verwendet.

Anschließend soll das Gütemaß für jede Bezier-Fläche geprüft werden. Diskrete Interpolationsmethoden bieten unterschiedliche Ansätze zur Abschätzung ihrer Genauigkeit an. Als Alternative zu der klassischen Methode der minimalen Quadrate kann auch die bereits erwähnte Cross-Validation-Methode benutzt werden: Ein Punkt des DGM unter der Bezier-Fläche wird „weg gestrichen“, und eine Flächengleichung basierend auf den restlichen Punkten wird anschließend hergeleitet. Die absolute Differenz zwischen dem wahren Z -Wert dieses Punktes und seinem Schätzwert, abgeleitet aus der Flächengleichung, stellt somit den Schätzfehler dar. Wird dies sukzessiv für alle Punkte durchgeführt, so liegt eine komplette Erfassung des Schätzfehlers vor, die Genauigkeit des Modells kann somit flächendeckend analysiert werden. Um hohen Rechenaufwand zu vermeiden, kann diese Methode auf je einen zufällig ausgewählten Punkt für jede Bezier-Fläche angewendet

werden. Es können aber mehrere Punkte auf einmal weg gestrichen werden. Klarerweise wird dann der Wert der auf diesen alternativen Wegen berechneten Genauigkeit von dem klassischen Schätzfehler der Cross-Validation-Methode abweichen.

3 Vergleich der Verfahren

Beide Ansätze werden anhand von zwei Beispielen verglichen. Die beiden unten angeführten Oberflächen werden jeweils auf einem (x, y) -Gitter, $0 \leq x, y \leq 1$ mit Maschenweite 0.02 erzeugt (siehe Abb. 2 und 3). Diese einfachen Oberflächen erfüllen dann die folgenden Gleichungen:

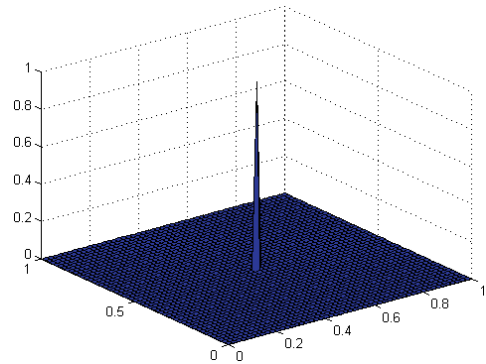


Abb. 2: Beispiel 1: Oberfläche mit einem auffälligen Maximum.

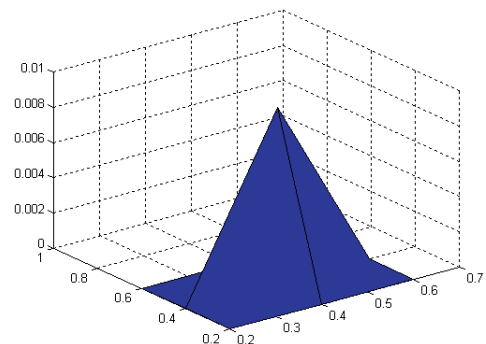


Abb. 2a: Beispiel 1: Totale Filterung mit einfachem arithmetischem Mittel. Ergebnis: Beinahe Null-Fläche.

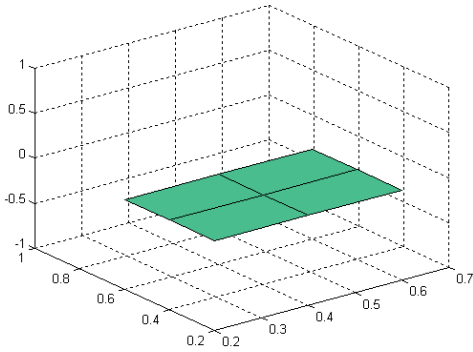


Abb. 2b: Beispiel 1: Totale Filterung mit der Methode der inversen Distanzen. Ergebnis: Beinahe Null-Fläche.

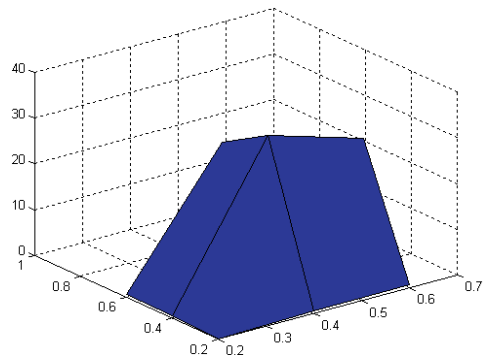


Abb. 3a: Beispiel 2: Totale Filterung mit einfachem arithmetischem Mittel.

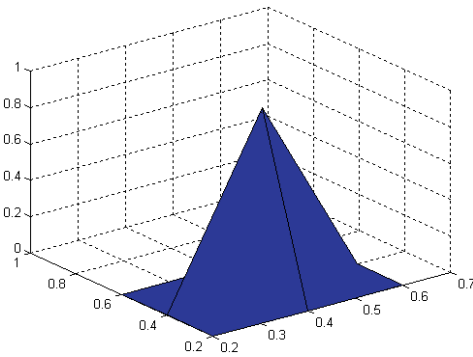


Abb. 2c: Beispiel 1: Gesteuerte Filterung.

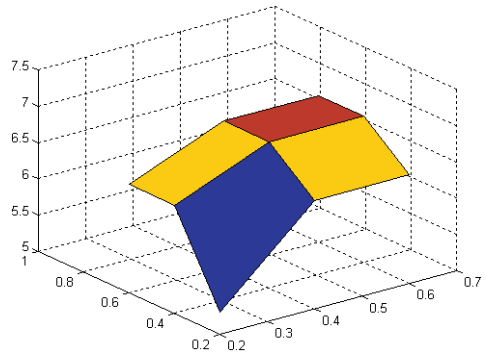


Abb. 3b: Beispiel 2: Totale Filterung mit der Methode der inversen Distanzen.

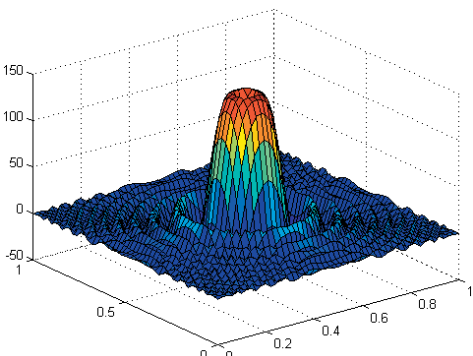


Abb. 3: Beispiel 2: Glatte wellenförmige Oberfläche. Achtung: Maßstabsänderung bei Z-Koordinate in Abb. 3a–3c.

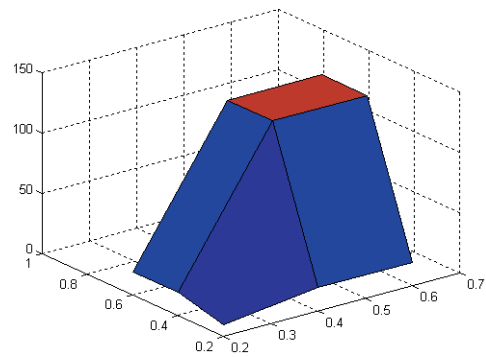


Abb. 3c: Beispiel 2: Gesteuerte Filterung.

Beispiel 1:

$$z(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = (0.5, 0.5) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

Beispiel 2:

$$z(x, y) = \frac{\sin(150(x-0.5)^2(y-0.5)^2)}{0.0001 + (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}. \quad (9)$$

Es soll nun eine Ausdünnung dieser Flächen auf ein gröberes Gitter der Maschenweite 0.2, also um einen Faktor 10 größer, erfolgen. Die totale Filterung wird sowohl mittels des einfachen arithmetischen Mittelwertes (Abb. 2a und 3a) als auch mit der Methode der inversen Distanzen (Abb. 2b und 3b) durchgeführt. Für die gesteuerte Auswahl von Punkten des DGM (Abb. 2c und 3c) wird der arithmetische Mittelwert als Schätzwert in (8) benutzt. Entsprechende Algorithmen wurden mit der mathematischen Software MATLAB realisiert. Die Genauigkeit der entsprechenden Bezier-Flächen, d.h. die nicht gemittelte Summe der Abweichungen über alle Maschen, sowie der Maximalwert der Oberflächen werden verglichen.

4 Diskussion und Ausblick

In diesem Vergleich wurde festgestellt, dass die totale Filterung einerseits zu einer starken Verfälschung der Extreme und andererseits zu einer gleichzeitigen Erhöhung der Genauigkeit im Vergleich zur gesteuerten Auswahl führt. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit den Aussagen aus der Optimierungstheorie. Die Genauigkeit bezieht sich auf die Gesamtabweichung zwischen wahren und durch Bezier-Flächen berechneten Werten. In einigen praktischen Fällen ist es aber wichtiger, die Extrema bei der Ausdünnung zu bewahren, etwa um maßstabtreue 3D- und 4D-Darstellungen von Oberflächen zu ermöglichen. Ein solches Beispiel soll später die 3D-Visualisierung der Oberfläche des Mars liefern, dessen Relief eine Mischung aus großflächigen Wüstenplateaus, tiefen Grabenstrukturen und hohen Bergen darstellt. Hier kann der Algorithmus zur gesteuerten Auswahl von Punkten von Nutzen sein. Als nächster

Schritt werden derzeit Untersuchungen zu Effizienz, Formerhaltung, Speicherbedarf und Rechenzeit am Beispiel eines hochalpinen Testgebietes untersucht. Dabei wird auch ein Vergleich mit anderen Ausdünnungsmethoden durchgeführt.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des MEX-Projektes, das durch die finanzielle Unterstützung des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) ermöglicht wird, am Institut für Kartographie der TU Dresden angefertigt. Dank schulden die Autoren Prof. SIEGFRIED MEIER, Institut für Planetare Geodäsie der TU Dresden, der sie mit Diskussionen unterstützt hat.

Literatur

- FARIN, G., 1994: Kurven und Flächen in Computer Aided Geometric Design: Eine praktische Einführung. – Translation Copyright bei Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- KRAUS, K., 2000: Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme. – Dümmler, Köln.
- MENZ, J., 1998: Differentiation mit Faltungsoperatoren, Affintransformation bei geometrischer Anisotropie und Schichtdickenbestimmung. – Forschungsbericht zu DFG III 03-Me 1111/2-1, Freiberg.
- RENKA, R.J., 1988: Multivariate Interpolation of Large Sets on Scattered Data. – ACM Transactions on Mathematical Software, **14**, 2: 139–148.
- SHANNON, C.E & WEAVER, W., 1963: Mathematical Theory of Communication. – University of Illinois Press, Illinois.

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. OLGA WÄLDER,
Prof. Dr. phil. habil. MANFRED BUCHROITHNER
Institut für Kartographie, TU Dresden
Mommsenstrasse 13, 01062 Dresden
Tel.: 0351-4633-6200 und 0351-4633-4809
Fax: 0351-463-3-7028, e-mail:
Olga.Waelder@mailbox.tu-dresden.de &
Manfred.Buchroithner@mailbox.tu-dresden.de

Manuskript eingereicht: August 2002
Angenommen: Dezember 2002