

## Fortpflanzung der „Unschärfe“ von Messdaten auf abgeleitete differential-geometrische Größen

OLGA WÄLDER, Dresden

**Keywords:** GeoInformatics, fuzzy value, fuzzy-propagation, surface approximation, surface deformation analysis

**Zusammenfassung:** Die meisten Messungen stellen aus mathematischer Sicht unscharfe Größen dar, weil bei ihrer Erfassung keine absolute Präzision gewährleistet werden kann. Manchmal gelingt es, statistische Tests zu entwickeln, die empfindlich auf das Auftreten von groben Abnormitäten in räumlich-zeitlichen Datenreihen reagieren, siehe WÄLDER (2005a, b), WAELDER & BUCHROITHNER (2004). Die „Unschärfe“ von Daten kann aber auch mit Hilfe von in der Fuzzy-Theorie entwickelten Werkzeugen modelliert werden.

Nun reicht es normalerweise nicht aus, erhaltene Messungen in ein GIS zu übertragen. In vielen Fällen werden diese Daten weiter auf ein Gitter interpoliert, sie können zu einer analytischen Oberfläche zusammengefasst werden, man interessiert sich für die Ableitungen erster oder höherer Ordnungen dieser analytischen Oberfläche usw. Einige Untersuchungen des Verhaltens unscharfer Oberflächen wurden bereits in KALEVA (1994), LODWICK & SANTOS (2003) durchgeführt. Die allgemeine Fragestellung lautet dann: Wie pflanzt sich die ursprüngliche „Unschärfe“ von Messungen auf einige von ihnen abgeleitete differential-geometrische Größen fort? In dieser Arbeit wird ein Ansatz zur Modellierung der Unschärfe-Fortpflanzung vorgestellt und anhand einer Fallstudie näher erläutert.

**Abstract:** *On fuzzy-propagation of measurements to derived differential-geometric characteristics.* From mathematical point of view, most measurements can be assumed to be fuzzy values because an absolute precision of a measurement cannot be guaranteed in the real world. There are some statistical tests, which are sensitive to the appearance of rough abnormalities in spatial time series, see WAELDER (2005a, b), WAELDER & BUCHROITHNER (2004).

The uncertainty of measurements can also be modeled using approaches from the fuzzy theory. Real measurements can be considered to be fuzzy values from mathematical point of view. Real measurements present a “raw material” for further researches. They can be interpolated over a grid and be approximated by an analytical surface. Additionally, it can be necessary to obtain some surface characteristics of higher order based on the grid. Some studies about fuzzy surfaces are still presented in KALEVA (1994), LODWICK & SANTOS (2003). It is clear, that each characteristic which is derived from uncertain measurements is also uncertain. In this paper we discuss a method of the fuzzy-propagation of measurements to derived differential-geometric characteristics.

---

### 1 Einige Definitionen aus der Fuzzy-Theorie

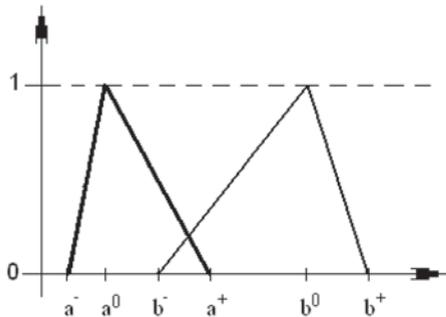
Die „Unschärfe“ von Daten kann unter anderem mit Hilfe von in der Fuzzy-Theorie entwickelten Werkzeugen modelliert werden. Zu diesen Werkzeugen gehört das so genannte Intervallkalkül. Eine Messung als mathematisches Objekt wird in Form eines Intervalls dargestellt, dessen Unter- und Ober-

grenze den zu erwartenden Rahmen für eine reale Messung angeben. Durch die variable Breite des Intervalls wird dabei der von Null abweichende Messfehler einer realen Messung wiedergegeben. Ein solches Modell ist im Grunde genommen das Einfachste für eine Fuzzy-Zahl.

Eine unscharfe Zahl kann als ungenau gegebene oder ungenau bestimmte Zahlen definiert werden. Unschärfe Zahlen werden

durch konvexe unscharfe Mengen beschrieben und ihre Zugehörigkeitsfunktion weist keine Nebenmaxima auf, s. BANDEMER & GOTTWALD (1993). Für unscharfe Intervalle ist der Kern ein Intervall. Die unscharfen Zahlen und Intervalle verallgemeinern daher die Ansätze der Intervallarithmetic, die aus der traditionellen Fehlerrechnung hervorgegangen ist. Nun rechnet man gleich mit durch die Fehlerstrahlen gegebenen Intervallen statt mit fehlerbehafteten reellen Zahlen. Kernpunkt dieses Übergangs ist die Idee, dass die Intervallpunkte „scharf“ gegeben sein müssen. Für die gewöhnliche Intervallarithmetic kann z. B. auf ALEFELD & HERZBERGER (1974) verwiesen werden. Um mit unscharfen Zahlen und Intervallen rechnen zu können, müssen zunächst einige Grundrechenarten hierfür erklärt werden, die in den weiteren Abschnitten verwendet werden. Durch die Operationen mit unscharfen Zahlen, die wir benutzen werden, entstehen neue unscharfe Zahlen, unscharfe Intervalle mit eigenen scharfen Grenzen. Wie in LODWICK & SANTOS (2003) werden wir uns nicht für die genaue Form der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen interessieren, sondern vielmehr für die Bestimmung von der Unter- bzw. Obergrenze der abgeleiteten Intervalle und von ihren „Zentren“: Wir bezeichnen so die Stellen, an welchen entsprechende die Zugehörigkeitsfunktionen ihre Maxima aufweisen.

Mit  $A = [a^-, a^0, a^+]$  und  $B = [b^-, b^0, b^+]$  bezeichnen wir zwei unscharfe Intervalle.



**Abb. 1:** Schematische Darstellung zweier unscharfer Intervalle  $A = [a^-, a^0, a^+]$  und  $B = [b^-, b^0, b^+]$  sowie ihrer Zugehörigkeitsfunktionen.

Die untere sowie obere Grenze und das „Zentrum“ eines unscharfen Intervalls werden als seine Parameter bezeichnet. Sie und ihre Zugehörigkeitsfunktionen sind in Abb. 1 schematisch dargestellt.

Wir benötigen die folgenden Operationen mit unscharfen Intervallen  $A, B$ : Summe  $A + B$ , Differenz  $A - B$ , Produkt  $A \cdot B$  und Subtraktion  $A/B$ . Als Ergebnis dieser Operationen entsteht eine neue unscharfe Zahl, ein Intervall  $C = [c^-, c^0, c^+]$ , für welches gilt:

$$\begin{aligned}
 C = A + B: \\
 c^- &= a^- + b^- \\
 c^0 &= a^0 + b^0 \\
 c^+ &= a^+ + b^+ \\
 \\
 C = A - B: \\
 c^- &= a^- - b^+ \\
 c^0 &= a^0 - b^0 \\
 c^+ &= a^+ - b^-
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 C = A \cdot B: \\
 c^- &= \min\{a^- b^-, a^+ b^-, a^- b^+, a^+ b^+\} \\
 c^0 &= a^0 b^0 \\
 c^+ &= \max\{a^- b^-, a^+ b^-, a^- b^+, a^+ b^+\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C = A/B: \text{ nur für } b^- > 0 \text{ oder } b^+ < 0 \\
 c^- &= \min\{a^-/b^-, a^+/b^-, a^-/b^+, a^+/b^+\} \\
 c^0 &= a^0/b^0 \\
 c^+ &= \max\{a^-/b^-, a^+/b^-, a^-/b^+, a^+/b^+\}
 \end{aligned}$$

Zusätzlich kann das Quadrat  $C = A^2$  und die Wurzel  $C = \sqrt{A}$  eines unscharfen Intervalls definiert werden, für das gilt:

$$\begin{aligned}
 C = A^2 = A \cdot A: \\
 \left\{ \begin{aligned}
 c^- &= \min\{a^- a^-, a^+ a^+\}, c^0 = (a^0)^2 \\
 c^+ &= \max\{a^- a^-, a^+ a^+\} \\
 &\text{für } a^- \geq 0 \text{ oder } a^+ \leq 0
 \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned}
 c^- &= 0, c^0 = (a^0)^2 \\
 c^+ &= \max\{a^- a^-, a^+ a^+\} \\
 &\text{für } a^- < 0 \text{ und } a^+ > 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 C = \sqrt{A}: \text{ nur für } a^- \geq 0 \\
 c^- &= \sqrt{a^-} \\
 c^0 &= \sqrt{a^0} \\
 c^+ &= \sqrt{a^+}
 \end{aligned} \tag{2'}$$

## 2 Mathematische Modellierung von unscharfen Oberflächen

Wir gehen im weiteren davon aus, dass unscharfe Hohennmessungen  $\tilde{z}_i = [z_i^-, z_i^0, z_i^+]$ :  $i = 1, \dots, n$  an scharfen Koordinaten  $(x_i, y_i)$ :  $i = 1 \dots n$  vorliegen. Wenn diese Daten auf ein scharfes Gitter  $\{X_j, Y_k\}$ :  $j = 1 \dots N$ ,  $k = 1 \dots M$  interpoliert werden, so sind die interpolierten Hohenn  $\tilde{Z}_{jk} = [Z_{jk}^-, Z_{jk}^0, Z_{jk}^+]$  an den Knoten des Gitters wiederum unscharf. Es hängt vom Interpolationsverfahren ab, welche Parameter diese neuen unscharfen Intervalle erhalten.

Bei jeder distanzabhängigen (scharfen!) Gewichtung der ursprünglichen Messwerte erhalten wir stets:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{jk} &= \alpha_1^{jk} \tilde{z}_1 + \alpha_2^{jk} \tilde{z}_2 + \dots + \alpha_n^{jk} \tilde{z}_n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} &= 1, \quad \alpha_i^{jk} = Fkt(d_i^{ij}) \\ d_i^{jk} &= (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_k)^2 \\ i &= 1 \dots n \\ j &= 1 \dots N \\ k &= 1 \dots M \end{aligned} \tag{3}$$

Die Abkürzung „Fkt“ wird in (3) für „eine Funktion von“ benutzt. Werden hier inverse Quadrate von Distanzen zur Berechnung der Gewichte hergezogen, so entspricht (3):

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{jk} &= \alpha_1^{jk} \tilde{z}_1 + \alpha_2^{jk} \tilde{z}_2 + \dots + \alpha_n^{jk} \tilde{z}_n \\ \alpha_i^{jk} &= \frac{w_i^{jk}}{\sum_{i=1}^n (w_i^{jk})}, \quad w_i^{jk} = \frac{1}{d_i^{jk} + \varepsilon} \\ \varepsilon &> 0 \\ i &= 1 \dots n, \quad j = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M \end{aligned} \tag{4}$$

Durch eine „künstliche“ Konstante  $\varepsilon$  kann in (4) verhindert werden, dass ein Gewicht unbestimmt ist, wenn die Vorhersagestelle mit einer Messstelle zusammenfällt. Weil alle in (4) verwendeten Gewichte positiv sind, können die Parameter von unscharfen interpolierten Hohennmessungen wie folgt berechnet werden, vgl. (1):

$$\begin{aligned} Z_{jk}^- &= \alpha_1^{jk} z_1^- + \alpha_2^{jk} z_2^- + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^- \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{jk}^0 &= \alpha_1^{jk} z_1^0 + \alpha_2^{jk} z_2^0 + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^0 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^0 \\ Z_{jk}^+ &= \alpha_1^{jk} z_1^+ + \alpha_2^{jk} z_2^+ + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^+ \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^+ \\ i &= 1 \dots n, \quad j = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M \end{aligned} \tag{5}$$

**Kommentar:** Um die weiteren Auslegungen nicht unnötig zu überfrachten, werden Kleinbuchstaben im weiteren Text auch für Gitterkoordinaten  $\{X_j, Y_k\}$ :  $j = 1 \dots N$ ,  $k = 1 \dots M$  verwendet.

**Bemerkung:** Falls die Koordinaten der Punkte **auch unscharf** sind, verwendet man in (4) die in (1) eingeführten Operationen mit unscharfen Zahlen.

Viele GIS-Tools verwenden Differenzbildungen statt klassischen Ableitungen. Nach diesem Prinzip funktionieren auch die meisten Filter. Die Fortpflanzung der „Unscharfheit“ kann in einem solchen Fall folgendermaßen verfolgt werden:

### 1. Mittelwertbildung

Hier wird meist die folgende Summe berechnet (nicht nur mit positiven Gewichten!):

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} \tilde{Z}_{jk} \\ \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Für die Breite des Fensters werden normalerweise  $L = 3, 5, \dots$  benutzt. Die Parameter des unscharfen Mittelwertes aus (6) sind:

$$\begin{aligned} m^- &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} \geq 0}}^L \beta_{jk} z_i^- + \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} < 0}}^L \beta_{jk} z_i^+ \\ m^0 &= \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} z_i^0 \\ m^+ &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} \geq 0}}^L \beta_{jk} z_i^+ + \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} < 0}}^L \beta_{jk} z_i^- \end{aligned} \tag{6'}$$

## 2. Partielle Ableitungen (in Form von Differenzen)

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_x^{jk} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{Z}_{(j+1)k} - \tilde{Z}_{(j-1)k}] \\ \tilde{\Delta}_y^{jk} &= \frac{1}{y_{k+1} - y_{k-1}} [\tilde{Z}_{j(k+1)} - \tilde{Z}_{j(k-1)}]\end{aligned}\quad (7)$$

$$j = 2 \dots N - 1, \quad k = 2 \dots M - 1$$

Die Parameter dieser unscharfen Größen sind:

$$\begin{aligned}\Delta_x^{jk-} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{Z}_{(j-1)k}^- - \tilde{Z}_{(j-1)k}^+] \\ \Delta_x^{jk0} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{Z}_{(j-1)k}^0 - \tilde{Z}_{(j-1)k}^0]\end{aligned}\quad (7)$$

$$\Delta_x^{jk+} = \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{Z}_{(j+1)k}^+ - \tilde{Z}_{(j+1)k}^-]$$

$$j = 2 \dots N - 1, \quad k = 2 \dots M - 1$$

Die Parameter der partiellen Ableitungen nach  $y$  können analog bestimmt werden. Die höheren Ableitungen können rekursiv auf der Basis eines primären Gitters berechnet werden, wie z. B. für die  $p$ . Ordnung nach  $x$  bzw. nach  $y$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{x(p)}^{jk} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{\Delta}_{x(p-1)}^{(j+1)k} - \tilde{\Delta}_{x(p-1)}^{(j-1)k}] \\ \tilde{\Delta}_{y(p)}^{jk} &= \frac{1}{y_{k+1} - y_{k-1}} [\tilde{\Delta}_{y(p-1)}^{(j+1)k} - \tilde{\Delta}_{y(p-1)}^{(j-1)k}]\end{aligned}\quad (8)$$

mit Berücksichtigung der entsprechenden Verkleinerung des sekundären Gitters. Für ihre Parameter gilt dann (Ableitungen nach  $y$  analog):

$$\begin{aligned}\Delta_{x(p)}^{jk-} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)k-} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)k+}] \\ \Delta_{x(p)}^{jk0} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)0} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)0}]\end{aligned}\quad (8')$$

$$\Delta_{x(p)}^{jk+} = \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)k+} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)k-}]$$

Zum Vergleich zweier zeitlich getrennter Epochen (in (9) durch [1] und [2] bezeichnet) können Verfahren der Deformationsanalyse

von Oberflächen herangezogen werden, siehe VOOSOGHI (2000). Wir möchten die Unschärfe von folgenden Charakteristiken diskutieren: Surface Dilatation und vom Quadrate des so genannten Surface Maximal Shear Strains. Dieses „Quadrat“ darf auch negativ werden, wenn Surface Maximal Shear Strain eine komplexe Zahl ist. Ihre Definitionen können (9) entnommen werden und entsprechen in unserem Fall:

$$\begin{aligned}DI\tilde{L} &= \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \quad \text{und} \\ \tilde{\Gamma}^2 &= (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2 \quad \text{mit} \\ \tilde{\lambda}_1 &= 0.5 \cdot (PA\tilde{R}_1 + \sqrt{PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2}) \\ \tilde{\lambda}_2 &= 0.5 \cdot (PA\tilde{R}_1 - \sqrt{PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2})\end{aligned}\quad (9)$$

und

$$PA\tilde{R}_1 = tr(\tilde{E} \cdot \tilde{A}^{-1}), \quad PA\tilde{R}_2 = det(\tilde{E} \cdot \tilde{A}^{-1})$$

mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 & \tilde{\Delta}_x^{jk}[1] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[1] \\ \tilde{\Delta}_x^{jk}[1] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[1] & 1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2 & \tilde{\Delta}_x^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[2] \\ \tilde{\Delta}_x^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[2] & 1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[2])^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{E} = 0.5(\tilde{C} - \tilde{A})$$

Aus (9) kann man sehen, dass

$$\begin{aligned}DI\tilde{L} &= PA\tilde{R} \\ \tilde{\Gamma}^2 &= PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2\end{aligned}\quad (9')$$

Nach einigen Vereinfachungen in (9) erhält man:

$$\begin{aligned}DI\tilde{L} &= PA\tilde{R}_1 = 0.5 \cdot tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1} - E) \\ &= 0.5 \cdot tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) - 1 \\ &= \frac{1}{2(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2)} \times\end{aligned}\quad (10)$$

$$\left[ \begin{aligned} &(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2) \cdot (1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2) \\ &- 2\tilde{\Delta}_x^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_x^{jk}[1] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[1] \\ &+ (1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[2])^2) \cdot (1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2) \end{aligned} \right] - 1$$

und

$$\begin{aligned}PA\tilde{R}_2 &= 0.5^2 \cdot det(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1} - E) \\ &= 0.25 \cdot (det(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) - tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) + 1) \\ &= 0.25 \cdot \left( \frac{det(\tilde{C})}{det(\tilde{A})} - tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) + 1 \right)\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}
&= 0.25 \cdot \frac{\det(\tilde{C})}{\det(\tilde{A})} - 0.5 \cdot PA\tilde{R}_1 - 0.25 \\
&= \frac{1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[2])^2}{4(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2)} \\
&\quad - 0.5 \cdot PA\tilde{R}_1 - 0.25
\end{aligned}$$

In den Relationen (10)–(11) werden somit nur die in (1) eingeführten Operationen mit scharfen Zahlen verwendet. Die in (10) und (11) präsentierten Herleitungen verwenden eine analytische Darstellung der Elemente einer inversen  $2 \times 2$ -Matrix.

Auf eine ähnliche Art und Weise kann die Unschärfe der weiteren differential-geometrischen Größen modelliert werden. Zum Beispiel setzt sich die Länge des Gradienten  $\tilde{Q}$  der unscharfen Oberfläche aus

$$\tilde{Q} = \sqrt{(\tilde{\Delta}_x^{ij})^2 + (\tilde{\Delta}_y^{ij})^2} \quad (12)$$

zusammen. Zu Berechnung der Parameter dieser unscharfen Größe können Operationen aus (1)–(2) und Relationen aus (7) benutzt werden.

In Abschnitt 3 wird die Fortpflanzung der Unschärfe von Hohemessungen auf die von ihnen abgeleiteten differential-geometrischen Größen an einem konkreten Beispiel präsentiert.

### 3 Eine Fallstudie: Hohemessungen am Blockgletscher Reichenkar in Tirol, Österreich

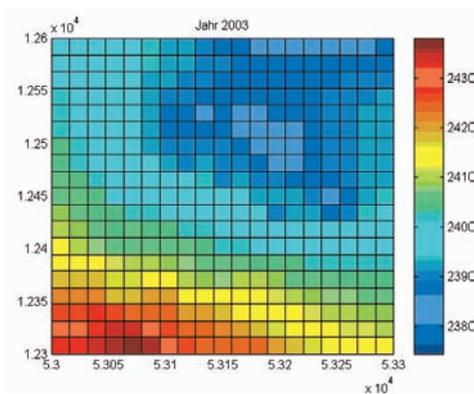
Frühere Untersuchungen am Blockgletscher Reichenkar wurden im Rahmen einer interdisziplinären Zusammenarbeit mit dem Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck fortgesetzt. Die ausführliche Beschreibung des Datenmaterials kann in WÄLDER u. a. (2004) und WÄLDER (2005a) gefunden werden. Wir gehen hier kurz auf einige wichtige Details ein, die dem besseren Verständnis der weiteren Auslegungen beitragen sollen.

Reichenkar Blockgletscher liegt im Inneren Reichenkar, einem kleinen Seitental, das in Form eines Hangetales in das Sulztal mündet. Das Innere Reichenkar liegt ca. 4 km SE von Langfeld im otztal bzw.

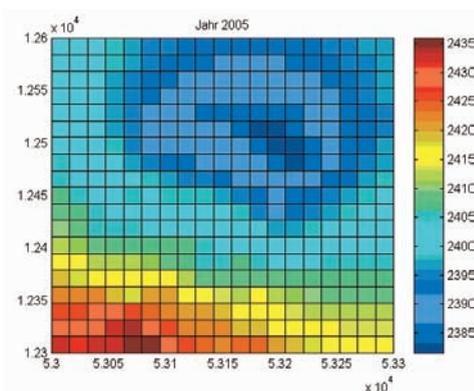
3 km S von Gries im Sulztal (westliche Stubai Alpen).

Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens dieses aktiven Blockgletschers wurden am Blockgletscher einige markierte Messpunkte (größere Felsblöcke mit eingemeielten und mit roter Farbe markierten Messmarken) vermessen.

Wir betrachten die Hohemessungen aus den Jahren 2003 und 2005 und gehen von einer konstanten Genauigkeit dieser Hohemessungen aus. Auf die Anfangszahl „52“ wird bei den  $y$ -Koordinaten (Gauß-Krüger Koordinatensystem) weiter verzichtet.



**Abb. 2a:** Parameter  $Z_{jk}^0$  der unscharfen Gitterwerte  $\tilde{Z}_{jk}$  laut (3') und (4) für das Jahr 2003. Die „Breite“ ihrer Unscharfede ist dabei konstant und beträgt 1.0 m.



**Abb. 2b:** Parameter  $Z_{jk}^0$  der unscharfen Gitterwerte  $\tilde{Z}_{jk}$  laut (3') und (4) für das Jahr 2005. Die „Breite“ ihrer Unscharfede ist dabei konstant und beträgt 1.0 m.

Die Höhenmessungen in den Jahren 2003 und 2005 werden als unscharfe Zahlen  $\tilde{z}_i$ ;  $i = 1 \dots n = 36$  mit  $\tilde{z}_i = [z_i^- = z_i^0 - 0.5, z_i^0, z_i^+ = z_i^0 + 0.5]$  modelliert. Im ersten Schritt

werden jährliche Höhenmessungen mit Hilfe der Methode der inversen Distanzen auf ein Gitter (ein „zungennahes“ Teilgebiet) interpoliert. Abb. 2a und 2b zeigen einen Parameter von den entsprechenden unscharfen Gitterwerten  $\tilde{Z}_{jk}$ ;  $i, j = 1 \dots N = 20$  aus (3') für entsprechende Jahre, die laut (4) berechnet werden. Zur Berechnung der Gewichte in (4) wird von  $\varepsilon = 0.6$  ausgegangen. Differenz zwischen den Parametern  $Z_{jk}^0$  in den Jahren 2003 und 2005 kann Abb. 3 entnommen werden.

Wir verwenden die Relationen (5)–(12) zur Berechnung von einigen – unscharfen – differential-geometrischen Größen für die Oberfläche des Reichenkar Blockgletschers in Abb. 4a, b, 5, 6.

Nun sollen die  $(x, y)$ -Koordinaten der Messungen auch **als unscharf** angesehen werden. Die Höhenmessungen in Jahren 2003 und 2005 werden als unscharfe Zahlen

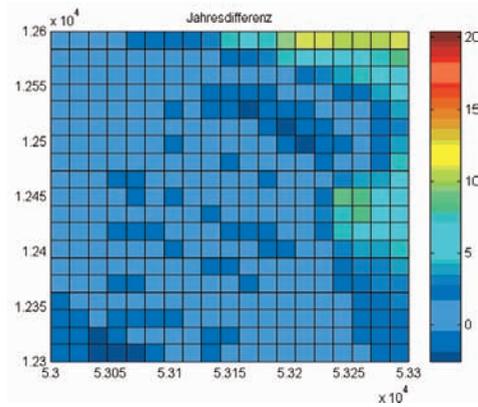


Abb. 3: Differenz zwischen den Parametern  $Z_{jk}^0$  in den Jahren 2003 und 2005.

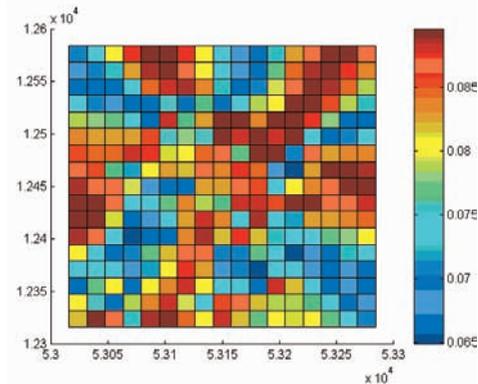
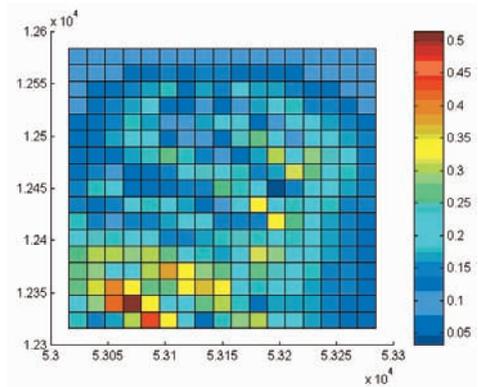


Abb. 4a: Gradientenlänge für das Jahr 2003 nach (12) und „Breite“ seiner Unschärfe.

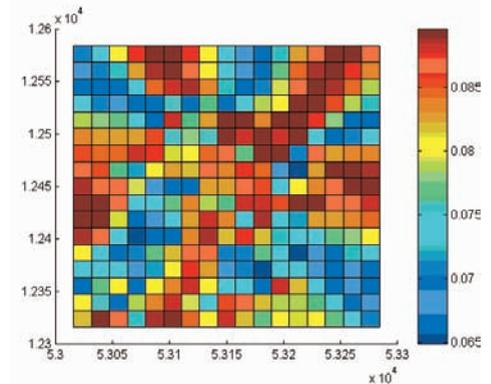
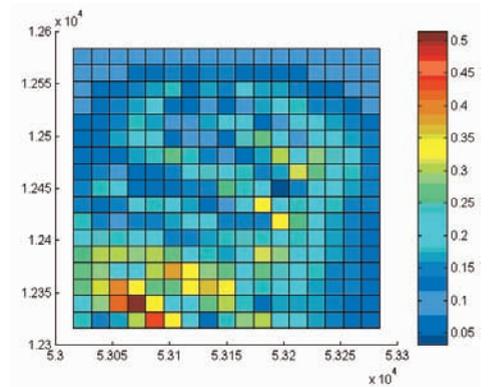
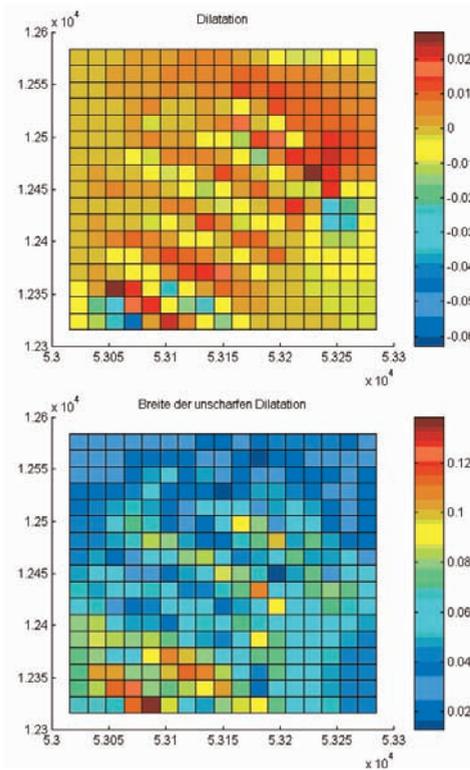
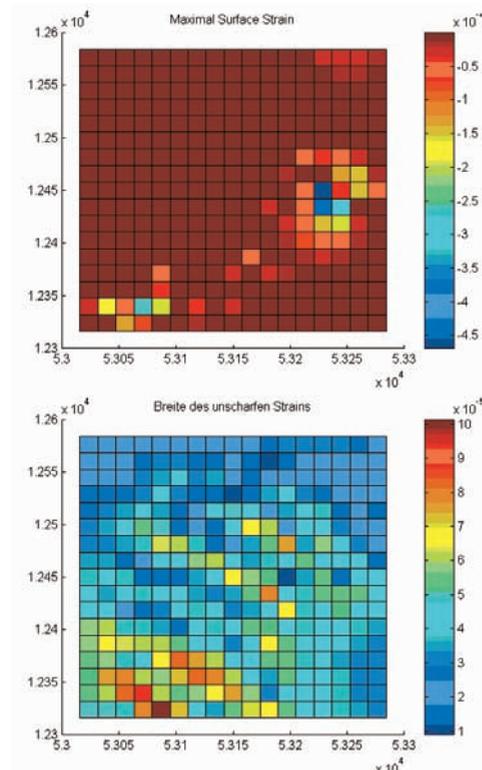


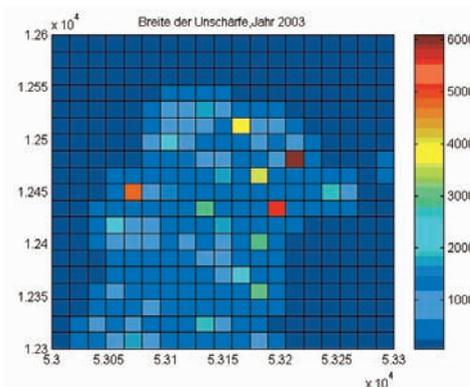
Abb. 4b: Gradientenlänge für das Jahr 2005 nach (12) und „Breite“ seiner Unschärfe.



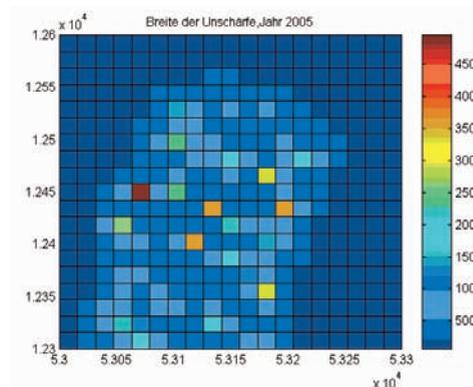
**Abb. 5:** Surface Dilatation für die Jahre 2003–2005 nach (10) und „Breite“ der Unschärfe.



**Abb. 6:** Quadrat des Surface Maximal Shear Strains für die Jahre 2003–2005 nach (9)–(11) und „Breite“ seiner Unschärfe.



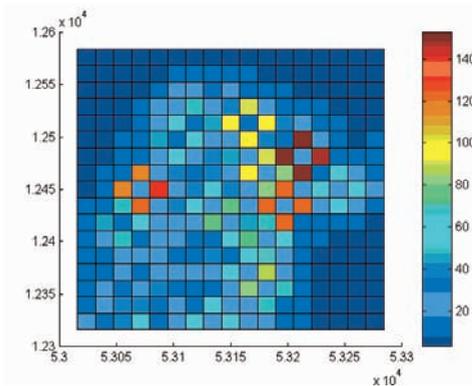
**Abb. 7a:** Breite der Unschärfe der Gitterwerte  $\tilde{Z}_{jk}$  für das Jahr 2003.



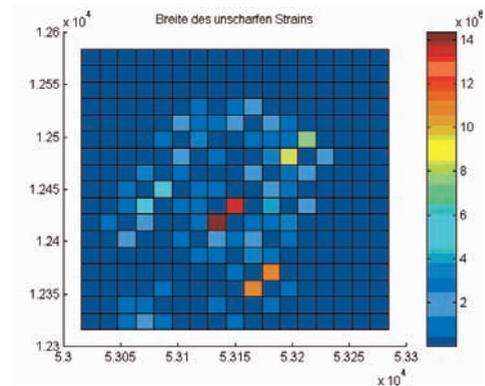
**Abb. 7b:** Breite der Unschärfe der Gitterwerte  $\tilde{Z}_{jk}$  für das Jahr 2005.

$\tilde{u}_i$ ;  $i = 1 \dots n = 36$  mit  $\tilde{u}_i = [u_i^- = u_i^0 - 0.5, u_i^0, u_i^+ = u_i^0 + 0.5]$  und  $u = x, y$  modelliert. Die folgenden Abbildungen veranschauli-

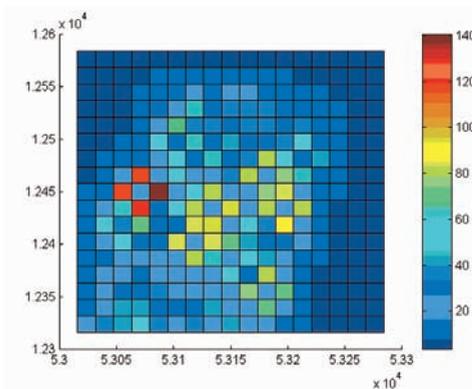
chen die Veränderung bei der Unschärfefortpflanzung. Wir verwenden die Relationen (5)–(12) zur Berechnung von einigen –



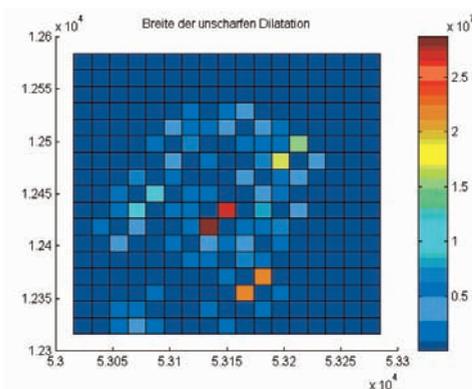
**Abb. 8a:** Breite der Unschärfe des Quadrates der Gradientenlänge für das Jahr 2003.



**Abb. 10:** Breite der Unschärfe des Quadrates des Surface Maximal Shear Strains für die Jahre 2003–2005.



**Abb. 8b:** Breite der Unschärfe des Quadrates der Gradientenlänge für das Jahr 2005.



**Abb. 9:** Breite der Unschärfe der Surface Dilatation für die Jahre 2003–2005.

unscharfen – differentialgeometrischen Größen für die Oberfläche des Reichenkar Blockgletschers in Abb. 7a, b bis Abb. 10.

#### 4 Diskussion der Ergebnisse

Die Anwendung der Fuzzy-Theorie stellt eine alternative, sinnvolle Ergänzung sowohl zu den statistischen Verfahren zur Genauigkeitskontrolle, als auch zum Fehlerfortpflanzungsgesetz dar. Bei vielen geowissenschaftlichen Anwendungen geht es nicht nur darum, einen Wert für eine bestimmte Charakteristik ableiten zu können, sondern viel mehr um die mit diesem Wert verbundene Güte späterer Ergebnisinterpretationen. Die Fuzzy-Theorie liefert ein bequemes Instrument für diesen Zweck.

Zur Vereinfachung wurde in dieser Arbeit ausschließlich das Problem der „Maximalfehlerberechnung“ behandelt. D. h. es wurde auf die Herleitung der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen der unscharfen Größen verzichtet. Man interessiert sich in einem gewissen Sinne für das Ausmaß der „Unschärfe“. Die grundlegenden Schritte zur Berechnung der Zugehörigkeitsfunktionen werden beispielsweise in BANDEMER & GOTTWALD (1993) beschrieben.

Ein Vorteil der Verfahren der Fuzzy-Theorie gegenüber „klassischen“ statistischen Methoden besteht in ihrem Verzicht auf einschränkende Annahmen über Verteil-

lungsfunktionen von Fehlern. Die Herleitung der Zugehörigkeitsfunktionen von abgeleiteten Größen ist einfacher als die Bestimmung ihrer (statistischen) Verteilungen. Außerdem können heterogene Bereiche, d. h. Messungen verschiedener Unschärfe, nach dem in dieser Arbeit präsentierten Verfahren problemlos modelliert und analysiert werden.

Mittels einer Gegenüberstellung der vorliegenden Abbildungen lässt sich feststellen, dass die Unschärfe bei den  $(x, y)$ -Koordinaten zu einer deutlichen (und zu erwartenden) Zunahme der Breite der Unschärfe von differential-geometrischen Größen führt, vgl. Abb. 4a und 8a, 4b und 8b und so weiter.

Der Charakter der Fortbewegung des Reichenkar Blockgletschers weist eine beinahe periodische Zu- und Abnahme der Surface Dilatation in die Richtung dieser Bewegung (SW – NO in Abb. 5) auf. Eine mögliche Erklärung für diese Beobachtung aus geologischer Sicht wird zur Zeit näher untersucht.

Alle in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wurden in MATLAB programmiert und visualisiert.

### Danksagung

Die Autorin möchte sich bei Prof. KRAINER, Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck, für die angenehme Zusammenarbeit und für die zur Verfügung gestellten Daten herzlich bedanken. Zudem sei dem Staatsministerium für Wissenschaft

und Kunst des Freistaates Sachsen gedankt, das durch die Gewährung einer Habilitationstorderung ebenfalls zu dieser Arbeit beigetragen hat.

### Literatur

- ALEFELD, G. & HERZBERGER, J., 1974: Einfuhung in die Intervallrechnung. – Bibliograph. Institut, Mannheim.
- BANDEMER, H. & GOTTWALD S., 1993: Einfuhung in die Fuzzy-Methoden. – Akademie Verlag GmbH, Berlin.
- KALEVA, O., 1994: Interpolation of fuzzy data. – Fuzzy Sets and Systems, 1994/61: 63–70.
- LODWICK, W. A. & SANTOS J., 2003: Constructing consistent fuzzy surfaces from fuzzy data. – Fuzzy Sets and Systems 2003/135: 259–277.
- VOOSOGHI, B., 2000: Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements. – Dissertation, Universität Stuttgart.

Anschrift der Autorin:

Dr. rer. nat. OLGA WÄLDER  
Institut für Kartographie  
Technische Universität Dresden  
MommSENstrae 13, D-01062 Dresden  
Tel.: +49-351-463-36200  
Fax: +49-351-463-37028,  
e-mail: Olga.Waelder@mailbox.tu-dresden.de

Manuskript eingereicht: März 2006  
Angenommen: Juli 2006