



## Kreismarken in perspektiver Abbildung – im Bild und im Bündelblock

BERNHARD P. WROBEL, Wachtberg

**Keywords:** Centres of perspective circular targets, correspondence models for circular targets and key points, bundle adjustment based on pixel bundles

**Summary:** *Circular targets in perspective projection – in an image and in bundle adjustment.* The perspective of a circular target generally is an ellipse, its centre  $e'$ , however, differs from the projected target centre  $m'$ . If  $e'$  is introduced into a bundle block adjustment instead of  $m'$  it may cause sensible deformations. A strict derivation of  $m'$  is presented by solving the polarity  $N = C'm'$ , with  $N$  the normal of the target and  $C'$  the matrix of the target ellipse in the image. Its solution by single value decomposition (SVD) gives two values for  $N, m'$ , which in the context of a bundle block can be resolved easily. In section 4 the treatment of overdetermined circular targets in a bundle adjustment is discussed. Three correspondence models are presented. The first two rely on the points of the elliptical target which were extracted from its digital image function. The centre of the circular target is determined in 3D, respectively, the target circle as a whole and their statistical uncertainties. The third model solves the correspondence by reconstructing the target in object space directly from its pixel grey values: the target plane and its brightness function, following the concept of facets stereo vision. It applies the original digital image function completely comprising the rays of all pixels around each target (called here a pixel bundle), and it derives the parameters by Gauß-Markov-optimization. In all, it is able to provide the optimal solution. This concept immediately may be transferred to general key points. Thus, the classical bundle block composed of all rays to object points may evolve to a block of pixel bundles, each referring to a key point or a circular target and their close surroundings.

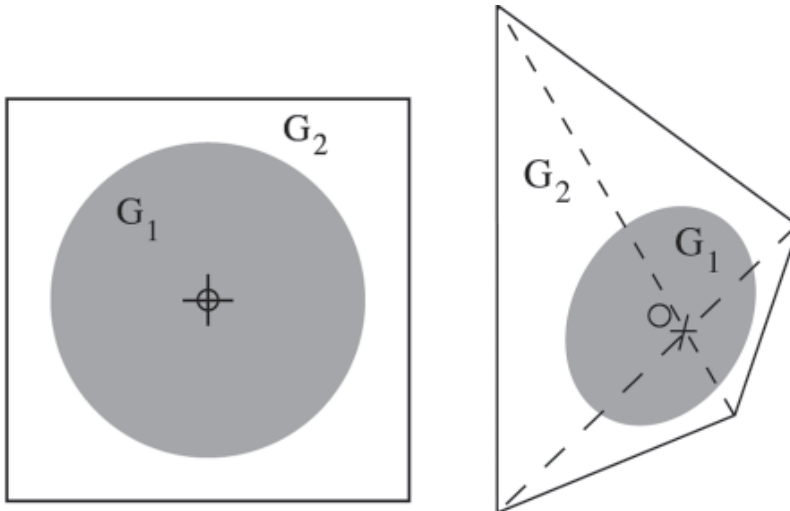
**Zusammenfassung:** Die Perspektive einer Kreismarke  $\mathcal{K}$  ist im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt  $e'$  jedoch von der projizierten Kreismitte  $m'$  verschieden ist. Benutzt man  $e'$  in einer Bündelblockausgleichung anstelle von  $m'$ , so können spürbare Verformungen des Bündelnetzes auftreten. Es wird eine strenge Herleitung von  $m'$  vorgestellt durch Lösung der Polarität  $N = C'm'$ , mit  $N$  der  $\mathcal{K}$ -Normalen und  $C'$  der Matrix der  $\mathcal{K}$ -Ellipse im Bild. Mit Hilfe einer SVD (single value decomposition) von  $C'$  erhält man zwei Wertepaare für  $N, m'$ , das zutreffende davon ergibt sich leicht in einer Bündelgleichung. Im Teil 4 wird die Behandlung von überbestimmten  $\mathcal{K}$  in einer Bündelgleichung mit drei Korrespondenzmodellen diskutiert. Die ersten beiden verwenden die Punkte der  $\mathcal{K}$ -Ellipse, die aus der digitalen Bildfunktion extrahiert worden waren. Es wird die  $\mathcal{K}$ -Mitte im 3D-Raum bestimmt bzw. die  $\mathcal{K}$  als Ganzes einschließlich der statistischen Unsicherheit. Das dritte Modell löst die Korrespondenz durch die Rekonstruktion der  $\mathcal{K}$  im 3D Raum direkt aus den originalen Pixelgrauwerten: die  $\mathcal{K}$ -Ebene und ihre Helligkeitsfunktion nach dem Konzept des Facetten-Stereo-Sehens. Dabei werden die Abbildungsstrahlen der Pixel der  $\mathcal{K}$ -Umgebung (hier genannt Pixelbündel) vollständig herangezogen und daraus die Modellparameter in einer Gauß-Markov-Optimierung abgeleitet. Das Modell ist in der Lage, die optimale Lösung zu erreichen. Das Konzept kann leicht auf die Verarbeitung von "natürlichen Punkten" (key points) übertragen werden. Daher könnte der klassische Bündelblock, bestehend aus der Gesamtheit von Strahlen zu Objektpunkten, weiter entwickelt werden zu einem Block aus Pixelbündeln, entweder zu einem natürlichen Punkt oder einer künstlichen Marke und deren enger Umgebung.

## 1 Einführung

Kreismarken (künftig mit  $\mathcal{K}$  bezeichnet) bilden sich in einer Kamera im Allgemeinen als Ellipsen ab (Abb. 1). Der Ellipsenmittelpunkt – leicht aus seinen Randpunkten zu berechnen – weicht jedoch vom projizierten Kreismittelpunkt ab. Gerade dieser wird aber benötigt, weil nur er mit Projektionszentrum und Kreismittelpunkt am Objekt kollinear ist. Dies ist die entscheidende Voraussetzung für die auf Bildpunkten basierende, klassische Bündellösung zur Orientierung von photogrammetrischen Bildern. Will man viele Bilder sehr genau gemeinsam orientieren und hat das erfasste Objekt eine Reihe von Kreismarken, so sind die projizierten Kreismitten anstelle der Ellipsenmitten unverzichtbar zur Vermeidung von systematischen Verformungen des Bündelblocks. Dies allein ist schon Grund genug, sich mit dieser Problematik zu befassen. Darüber hinaus stößt man auf die gleiche Aufgabe bei der Rekonstruktion von Kreisen als Elemente von hergestellten Objekten aus Industrie oder Kultur. Lösungsvorschläge zu diesem Thema gibt es seit Langem, siehe z. B. den strengen von KAGER (1981) oder die Abschätzung nach DOLD (1997). Dabei zeigt sich, dass mit algebraischer projektiver Geometrie Probleme wie

das vorliegende durchsichtig werden und elegant lösbar sind.

Generell sind signalisierte Punkte am Objekt für Bündelblöcke des Nahbereichs wichtig, wenn höchste Ergebnissenauigkeiten erreicht werden müssen. Die Gestaltung von Punktmarken und ihre Eigenschaften sind daher immer wieder und sehr gründlich untersucht worden (siehe LUHMANN 2010 und die dort angegebene Literatur). Die aus Linien aufgebauten Marken, z. B. ein Quadrat, sind a priori frei von der Markenexzentrizität im Bild (Abb. 1): In der perspektivischen Abbildung bleiben Geraden und Geradenschnitte erhalten, der Mittelpunkt eines Quadrates kann – mathematisch gleichwertig – vor oder nach der Abbildung aus seinen Randpunkten bestimmt werden. Dennoch scheinen Kreismarken auch heute noch bevorzugt zu werden, vermutlich wegen ihrer stabileren Rekonstruktion aus gestörten Punktmarken. Projizierte Kreismarken sind aber als quadratische Funktion nicht frei von Exzentrizitäten, auch wenn es oft nur um kleine Beträge geht. Selbst diese lassen sich minimieren, wenn man möglichst kleine Marken verwendet. Die Perspektive kommt im Differentiellen, wenn die  $\mathcal{K}$  im Bild kleiner ist als die Kamerakonstante, der Affinabbildung recht nahe. Die Exzentrizität kann dann



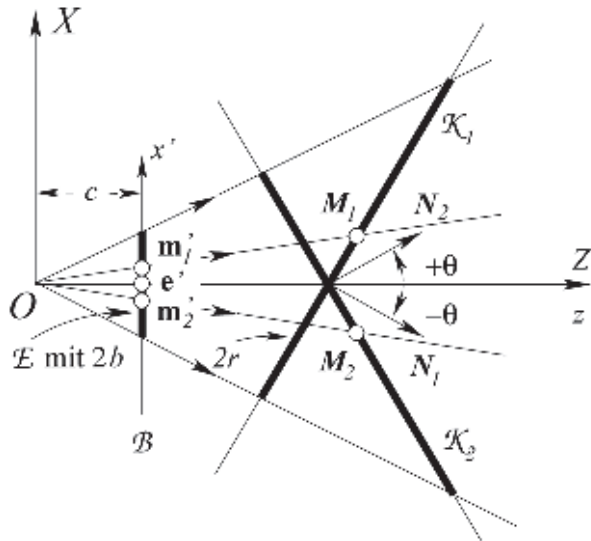
**Abb. 1:** Kreismarke im Objektraum und im Perspektivbild; links: Kreismarke im Objektraum: Quadrat und Kreis (Radius  $r$ ) mit gemeinsamer Mitte  $M+$  bzw.  $o$  und Objektgrauwerten  $G_2, G_1$ ; rechts: Perspektivbild von  $\mathcal{K}$ ;  $o$  = Ellipsenmitte  $e'$ ,  $+$  = projizierte  $\mathcal{K}$ -Mitte  $m'$  = Mitte von proj. Quadrat; ---- Hilfslinien. Die Bildfunktion der Ellipsenlinie besitzt meist eine Breite von wenigen Pixeln.

tolerierbar sein. Man hat aber das Risiko von Ungenauigkeiten (die Zahl an Pixeln pro Ellipse ist klein), zudem die Unbequemlichkeit, die  $\mathcal{K}$  an Aufnahmeentfernungen und Kamera anpassen zu müssen. Mit einer strengen, für jede  $\mathcal{K}$ -Größe einsetzbaren Methode der  $\mathcal{K}$ -Zentrumsbestimmung im Bild – wie hier vorgestellt – gewinnt man Flexibilität und Genauigkeit und kann das an sich sehr hohe Potential an relativer Lokalisierungsgenauigkeit durch digitale Bildverarbeitung voll nutzen.

Dem skizzierten Problem wollen wir uns zuerst geometrisch anschaulich nähern und danach einen strengen algebraischen Lösungsweg herleiten. Man lege ein Auge des Betrachters in das Projektionszentrum  $O$  (Abb. 2) und schaue über die Ellipse im Bild hinaus in den Objektraum, wo auf einer Trägerebene eine Kreismarke mit frei gewähltem Radius  $r$  (z. B.  $r = 1$ ) liegen möge. Durch Drehen und Verschieben der Trägerebene kann man Kreismarke und Bildellipse zur Deckung bringen, also die Kreismarke rekonstruieren, jedoch – im Hinblick auf den beliebigen Kreisradius – nur mit unbekanntem Abstand zum Projektionszentrum. Mit dem Strahlenbündel eines Bildes allein kann man bekanntlich keine

metrischen Aussagen erzielen. Das Ergebnis reicht aber aus, weil aus dem Strahlenbündel des Bildes nur der spezielle, zum Kreismittelpunkt führende Strahl mit seinen zwei Komponenten interessiert, die Distanz und damit der Kreisradius aber nicht.

Darüber hinaus ergibt der spielerisch experimentelle Umgang mit der Trägerebene von  $\mathcal{K}$ , dass es für sie eine zweite Stellung im Raume gibt, die ebenfalls mit der Bildellipse verträglich ist. Wenn die Ellipse zentrisch auf den Bildachsen  $x'y'$  liegt, ist die zweite Lösung sogar genau symmetrisch zur ersten (Abb. 2). Bei exzentrischer Ellipse zeigen die zwei Lösungen keine Symmetrie. Im Sonderfall einer  $\mathcal{K}$  parallel zur Bildebene fallen beide Lösungen zusammen, das  $\mathcal{K}$ -Bild stellt einen Kreis dar und sein Mittelpunkt ist bereits die gesuchte Lösung. Die Vielfalt der Lösungen ist aber noch nicht erschöpft. Die vom Projektionszentrum zur Bildellipse verlaufenden Strahlen definieren vor dem Betrachter und Bildebene einen Kegel, den es jedoch auch *d a h i n t e r* geben muss durch Verlängern der Strahlen nach hinten und dort die zentralsymmetrisch gelegene Kreismarke ergibt. Es ist klar, nur Lösungen mit positiven  $Z$ -



**Abb. 2:** Zwei Rekonstruktionen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  einer Kreismarke im Strahlenkegel ihrer Ellipse  $\mathcal{E}$  bei frei gewähltem  $\mathcal{K}$ -Radius  $r$ .  $\mathcal{E}$  in der Bildebene  $\mathcal{B}$  mit Kamerakonstante  $c$  steht hier mit ihrem großen Durchmesser  $2a$  senkrecht auf der Zeichenebene, nur der kleine Durchmesser  $2b$  auf der  $x'$ -Achse ist sichtbar, ebenso wie die Koordinatenachsen  $X, Z$  und  $x', z'$ ; die Ellipsenmitte  $e'$  im Koordinatenursprung von  $x'y'z'$ ;  $M_1, M_2$ : rekonstruierte  $\mathcal{K}$ -Mitten vor der Bildebene, ihre Bilder  $m_1, m_2$  liegen immer auf dem kleinen Ellipsendurchmesser  $2b$ , hier auf  $x'$  und symmetrisch zur  $z'$ -Achse;  $N_1, N_2$  Normalen der  $\mathcal{K}$  mit Neigungswinkeln  $\theta$ .

Koordinaten sind praktisch relevant. Es bleibt bei zwei Lösungen vor der Bildebene. Welche davon die richtige ist, lässt sich mit dem Einzelbild allein nicht entscheiden, wohl aber mit jedem weiteren Bild (mit unabhängigen Orientierungsparametern), in dem die  $\mathcal{K}$  als Ellipse vorkommt, insbesondere in einem Bündelblock. Halten wir fest, wir benötigen von einer  $\mathcal{K}$  nur ihre Normale und ihren Mittelpunkt.

Auf der Suche nach einem strengen Verfahren erweist sich die Literatur über die Rekonstruktion von Kreisen als sehr hilfreich (KÄGER 1981, D'HOME et al. 1990, FORSYTH et al. 1991, KANATANI 1993, PHILIP 1997). Mit diesen Grundlagen lassen sich die geometrischen Beziehungen restlos abklären. Hierüber wird mit Ergänzungen und numerischen Beispielen berichtet.

Insgesamt wird der Beitrag folgendermaßen gegliedert. Im Teil 2 werden die projektiven Grundlagen zusammen getragen und die Lösung der Aufgabe aufgezeigt. Danach werden die geometrischen Abhängigkeiten charakterisiert, numerische Beispiele demonstrieren die Notwendigkeit, die hergeleiteten Beziehungen in Bündelblöcken zu nutzen. Danach befassen wir uns mit Korrespondenzmodellen von Punktmerkmalen im Bündelblock, auch solchen, die ausschließlich mit Grauwerten formuliert sind. Wir vergleichen sie nach ihrer statistischen Qualität und ihrer Bedeutung für die künftige Bündelblocklösung.

## 2 Projektive Grundlagen: Der Kreis und sein projizierter Mittelpunkt

Wir haben das Ziel, die projizierte Kreismitte allein aus den Bilddaten der  $\mathcal{K}$  (Ellipsenmatrix  $\mathbf{C}' = [c'_{ij}]$ ,  $i, j = 1 \dots 3$ , innere Orientierung der Kamera) im Kamerakoordinatensystem zu bestimmen. Das heißt aber, es müssen Beziehungen zwischen den geometrischen Gebilden im Objektraum (Trägerebene des Kreises, Kreis und seine Mitte) und in der Bildebene (Ellipse, projizierte Kreismitte) gefunden werden.

Für die Herleitungen wird die algebraische projektive Geometrie herangezogen. Euklidische Vektoren des Bildraumes werden klein, geneigt und mit Apostroph geschrieben, z. B.  $\mathbf{x}'$ , und die des Objektraumes groß

und geneigt, z. B.  $\mathbf{X}$ , dagegen homogene Vektoren und Matrizen aufrecht, z. B.  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{C}$ , stets alle fett. Das Zeichen = zwischen homogenen Vektoren bedeutet Proportionalität, sind sie euklidisch normiert (die letzte Komponente ist 1), so gilt die Gleichheit der Vektoren. Es werden Rechtskoordinatensysteme eingeführt (Abb. 2):  $XYZ$  für den Objektraum, Ursprung im Projektionszentrum  $\mathbf{O}$ , parallel dazu in der Bildebene die auf den Hauptpunkt bezogenen Koordinaten  $x'_{kal}, y'_{kal}$  einer kalibrierten Kamera mit Konstante  $c'_{kal}$ . Wir gehen jedoch über zu euklidisch normierten Bildkoordinaten  $\mathbf{x}' = [x'_{kal}/c'_{kal}, y'_{kal}/c'_{kal}, 1]^T = [x', y', 1]^T$ , d.h.,  $c = 1$ , und die  $3 \times 3$ -Kameramatrix wird einfach:  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ , vgl. (FÖRSTNER & WROBEL 2004, 222, LUHMANN 2010, 253). Die positive Z-Achse ist zugleich optische Aufnahmeachse der Kamera.

Zwischen Punkten  $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$  des Objektraumes und der Bildebene  $\mathbf{x}' = [x', y']^T$  bestehe die Perspektivbeziehung

$$x' = X/Z, \quad y' = Y/Z, \quad (1)$$

wobei gelten soll  $Z > 1$ . Es wird unterstellt, dass ein Datensatz von Ellipsenpunkten aus dem Bild extrahiert und erfolgreich in eine Ellipsengleichung samt Dispersionsmatrix  $\mathbf{D}(c'_{ij})$ , siehe z. B. (FÖRSTNER & WROBEL 2004, 89), überführt wurde

$$c'_{11}x'^2 + 2c'_{12}x'y' + 2c'_{13}x' + c'_{22}y'^2 + 2c'_{23}y' + c'_{33} = 0 \quad (2)$$

oder in homogenen Größen

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{C}' \mathbf{x}' = 0 \quad \mathbf{x}' = [x', y', 1]^T$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C}'^T = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{bmatrix}$$

Die Bildkoordinaten  $x', y'$  in (2) ersetzen wir durch Objektkoordinaten aus (1):

$$c'_{11}X^2 + 2c'_{12}XY + c'_{22}Y^2 + 2c'_{13}XZ + 2c'_{23}YZ + c'_{33}Z^2 = 0$$

Punkte  $[X, Y, Z]$  auf dem Kreis in 3D erfüllen diese Gleichung, aber auch Punkte  $-X, -Y, -Z$  auf einer zentralsymmetrisch gelegenen Kreismarke hinter der Bildebene. Wir haben

sie aber bereits ausgeschlossen. Im weiteren Vorgehen werden überschlanke oder gar entartetete Ellipsen mit Neigungswinkeln  $\theta \rightarrow 90^\circ$ , Abb. 2, übergangen. Ihre Extraktion aus der Bildfunktion wäre grenzwertig. Sie wären in einer Bündelausgleichung nicht genau genug. Deshalb haben wir es nur mit regulären Ellipsenmatrizen  $C'$  zu tun.

Entscheidend für den Lösungsweg ist die Erkenntnis, dass zwischen den gesuchten Größen, nämlich der Normalen  $N$  der  $\mathcal{K}$ -Trägerebene und der projizierten  $\mathcal{K}$ -Mitte  $m'$ , eine direkte Beziehung besteht in Form einer Polarität:

$$N = C'm' \quad (3)$$

Dies sei folgendermaßen gezeigt. Es ist bekannt (siehe z. B. FÖRSTNER & WROBEL 2004, 775), dass man mit geometrischen Fernelementen des Bildraumes die Orientierung von zugehörigen Elementen im Objektraum bestimmen kann, ein bemerkenswertes Potenzial der algebraischen projektiven Geometrie. Im Anhang 7.1 wird beispielsweise hergeleitet, dass allgemein die Normale  $N$  einer Ebene gleich dem Parametervektor  $I'_\infty$  ihrer abgebildeten Ferngeraden ist:

$$N = I'_\infty \quad (4)$$

Nun wird man nicht garantieren können, für alle Werte von  $N$  die Ferngerade der  $\mathcal{K}$ -Ebene im Bild direkt anzutreffen. Deshalb muss man  $I'_\infty$  – was für alle sinnvollen Werte von  $N$  möglich ist – aus den projektiven Eigenschaften der hier als Marke gewählten Figur herleiten, dem Kreis und dessen Bild, die Ellipse, mit Hilfe von Polaritäten mit Ferngeraden. Auf der  $\mathcal{K}$  im Objektraum hat man die Polarität zwischen Kreis  $C$ , seinem Mittelpunkt  $M$  als Pol und der Ferngeraden  $I_\infty$  der Trägerebene als Polare (Anhang 7.2). Bei der projektiven Abbildung bleibt die Polarität invariant (Anhang 7.3). Im Bild existiert zwischen den abgebildeten Größen  $m'$ ,  $C'$  und  $I'_\infty$  wieder eine Polarität, also

$$I'_\infty = C'm' \quad (5)$$

woraus mit (4) Gleichung (3) folgt. Die Polare als Ferngeraden entziehen sich häufig der

unmittelbaren Anschauung, obwohl sie algebraisch existieren. Bei einer allgemeinen Polarität  $I' = C'x'$  hat man oft, dass der Pol  $x'$  nicht allzu weit außerhalb der zugehörigen Ellipse  $C'$  liegt und dass die vom Pol ausgehenden Ellipsentangenten in Ellipsenpunkten von der Polare  $I'$  geschnitten werden. Auf diese Weise kann man die allgemeine Polarität auch herleiten. Eine Grenzsituation ergibt sich, wenn sich der Pol der Ellipse nähert und ihn berührt: die zwei Tangenten vereinigen sich mit Pol und Polare. Für Pole im Inneren einer Ellipse gehört eine außerhalb liegende Polare, falls Pol und Ellipsenmittelpunkt identisch sind, befindet sich die Polare im Unendlichen (Anhang 7.2). Das ist die hier gegebene Situation. In der Gruppe der projektiven Abbildungen (auch Kollineationen, Homographien oder projektive Transformationen genannt) gehört  $I' = C'x'$  zur Untergruppe projektiver Korrelationen und zwar speziell zu den Polaritäten wegen der Symmetrie von  $C'$ . Eine reguläre Polarität transformiert dualisierend Punkte in Geraden oder umgekehrt. Jeder Punkt  $x'$  des 2D Raumes kann mit  $C'$  in eine Polare transformiert werden und umgekehrt. In höher dimensionalen Räumen als hier werden durch Korrelationen Punkte in Hyperebenen transformiert. In der Photogrammetrie ist bekanntlich eine singuläre Korrelation viel im Gebrauch, nämlich in Verbindung mit der Epipolargeometrie zweier Bilder: wenn ein Punkt eines Bildes in eine epi-polare Linie in einem Nachbarbild transformiert wird, um darauf den korrespondierenden Bildpunkt zu suchen.

Nach diesen projektiven Grundlagen befassen wir uns mit der Lösung der Gleichung  $N = C'm'$ . Im Allgemeinen ist eine übliche Gleichungslösung nicht möglich, da beide Vektoren  $N$  und  $m'$  unbekannt sind. Im Sonderfall jedoch, dass die  $\mathcal{K}$ -Ebene von vornherein parallel zur Bildebene liegt, stellt Matrix  $C'$ , leicht erkennbar, einen Kreis dar, und es gilt  $N = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Diesen Zustand kann man auch algebraisch herstellen mit Hilfe erlaubter Umformungen. Man erreicht dies in Schritten mittels Rotationen des Bildkoordinatensystems  $x' \ y' \ z'$ . Sie sind als konforme Transformationen zulässig, d.h. das Strahlenbündel des Bildes wird dabei nicht deformiert. Schritt 1: Rotation des Koordinatensystems auf die Eigenachsen  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  der Matrix  $C'$ . Sie selbst wird diagonal

mit Eigenwerten  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$ . Im Beispiel der Abb. 2 liegt die Ellipse auf den Koordinatenachsen, ihre große Achse auf  $\mathbf{y}''$ , die kleine auf  $\mathbf{x}''$ . Die  $\mathcal{K}$  kann nun um den Winkel  $+\theta$  oder  $-\theta$  geneigt sein, die Winkel zeigen ihre zwei möglichen Lagen. Die Nicht-Null-Komponenten ihrer Normalen befinden sich in der  $\mathbf{x}'' \mathbf{z}''$ -Ebene, ebenso wie die der projizierten  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}''$ . Schritt 2: Rotation des Koordinatensystems um  $\mathbf{y}''$  mit  $\theta$  unter der Bedingung, dass im neuen System die neue Matrix  $\mathbf{C}'''$  identische Diagonalglieder  $c'''_{11} = c'''_{22}$  erhält. Der Kegelschnitt  $\mathbf{C}'''$  stellt sich nun als verschobener Kreis dar, sein Mittelpunkt  $\mathbf{m}'''$  liegt auf der  $\mathbf{x}'''$ -Achse und die  $\mathcal{K}$  befindet sich parallel zur Bildebene, d.h. die Normale ist  $\mathbf{N}''' = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Die projizierte Kreismitte  $\mathbf{m}'''$  folgt daher aus (3) zu  $\mathbf{m}''' = \mathbf{C}'''^{-1}[0 \ 0 \ 1]^T$ . Schritt 3: Die Rücktransformation von  $\mathbf{N}'''$  und  $\mathbf{m}'''$  in das Ausgangssystem beendet die Lösung.

Im Wesentlichen beruhen alle in der Literatur genannten Lösungsverfahren auf den drei Schritten. Im Folgenden werden die Berechnungsformeln nach PHILIP (1997) genannt, die besonders elegant und kompakt sind. Sie gelten für den Radius  $r = 1$  der  $\mathcal{K}$ , PHILIP verwendet für  $\mathbf{C}'$  anstelle der Eigenwertzerlegung die SVD (singular value decomposition)  $\mathbf{C}' = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ .  $\mathbf{S}$  ist diagonal mit den nicht negativen, reellen Singulärwerten  $s_1 \geq s_2 > s_3 > 0$ . Diese Reihenfolge der  $s_i$  und der Spalten von  $\mathbf{V}$  wird allen Stellungen der  $\mathcal{K}$ -Ebene im 3D-Raum gerecht. Mit den  $s_i$  ermittelt man den Neigungswinkel  $\theta$  der  $\mathcal{K}$ -Ebene im System der Eigenachsen

$$\cos^2\theta = (s_2 + s_3) / (s_1 + s_3). \quad (6)$$

Die zwei Werte des **cos** ergeben die zwei Lösungen der Rekonstruktion. Für die  $\mathcal{K}$ -Normale  $\mathbf{N}$  und die  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$  erhält man im ursprünglichen System  $X, Y, Z$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \pm \mathbf{V} [-\sin\theta \ 0 \ \cos\theta]^T \\ \mathbf{M} &= \pm \mathbf{V} \left[ -\sin\theta \sqrt{s_3/s_1} \quad 0 \quad \cos\theta \sqrt{s_1/s_3} \right]^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Das Resultat für  $\mathbf{M}$  kann mit  $r$  multipliziert werden, falls der  $\mathcal{K}$ -Radius  $r \neq 1$  bekannt ist. Dann ist  $\mathbf{M}$  in 3D vollständig rekonstruiert worden. Mit (1), d.h. mit  $c = 1$ , folgt daraus

die ins Bild projizierte  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}'$ . Für die ursprüngliche Kamera erhält man  $[m'_1, m'_2]^T = [(X_M / Z_M) c_{kal}, (Y_M / Z_M) c_{kal}]^T$ .

Die beiden Lösungen für die projizierte Mitte einer  $\mathcal{K}$  kann man also ohne Näherungswerte allein aus ihrer Bildellipse bestimmen ohne irgendeine Approximation.

### 3 Der projizierte Kreismittelpunkt im Bild: Interpretationen und Beispiele

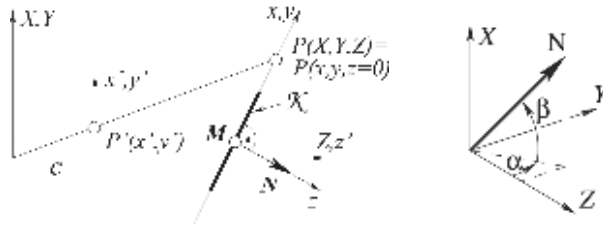
Das Perspektivbild einer  $\mathcal{K}$  wird man in allen Größen antreffen, von nur wenige Pixel zählenden bis zum Bildformat füllenden oder das Format schneidenden Größen. In beiden Extremen kann die statistisch zuverlässige Bestimmung von  $\mathbf{C}'$  unmöglich sein: es sind zu wenige Randpunkte für eine Ellipse vorhanden, weniger als fünf, oder die Ellipse erscheint im Bild mit einem zu kleinen Ausschnitt. Hier sei mit wenigen Simulationen ein Einblick in die Beträge der Exzentrizitäten gegeben, ohne allzu sehr ins Detail zu gehen. Dies sei dem interessierten Leser überlassen. Primär sind die  $\mathcal{K}$  von Bündelblöcken im Visier, also kleine  $\mathcal{K}$ .

Es seien im Objektraum geeignete  $\mathcal{K}$  definiert und in die Bildebene abgebildet worden. Daraus kann die Exzentrizität  $\Delta(\mathbf{e}')$  der Ellipsenmitte  $\mathbf{e}'$  gegenüber der projizierten  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}'$  direkt berechnet werden oder mit PHILIP (1997) über

$$\Delta(\mathbf{e}') = \mathbf{m}' - \mathbf{e}' = \mathbf{C}'^{-1} \left[ \mathbf{N} - [0 \ 0 \ 1]^T \right]. \quad (8)$$

Für die Simulationen wählen wir  $\mathcal{K}$ -Ebenen mit Mittelpunkt  $\mathbf{M} = [X_M, Y_M, Z_M]^T$  und Normale  $\mathbf{N}$ , definiert mit den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , Abb. 3, so dass  $\mathbf{N} = [\sin\beta, -\sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha \cos\beta]^T$  und  $\mathbf{N}^T \mathbf{N} = 1$ .

Objektpunkte  $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$  auf der  $\mathcal{K}$ -Ebene erfüllen die Ebenengleichung  $\mathbf{N}^T (\mathbf{X} - \mathbf{M}) = 0$ . Der  $\mathcal{K}$ -Ebene wird ebenfalls ein 3D-Rechtskoordinatensystem  $xyz$  zugeordnet mit der  $z$ -Achse auf der Normalen  $\mathbf{N}$ . Punkte haben die Koordinaten  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ , mit  $z \equiv 0$ , ihr Ursprung sei in der  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$ . Eine der Achsen kann man frei wählen wegen der Rotationssymmetrie des Kreises:  $\mathbf{y}$  liege hier horizontal und normal zu  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{N}$ . Der  $\mathcal{K}$ -Kreis



**Abb. 3:** Koordinatensysteme und Kreismarke: Objektkoordinatensystem  $XYZ$ , Bildkoordinatensystem  $x' y' z'$  mit Kamerakonstante  $c$ ,  $\mathcal{K}$ -Koordinatensystem  $xyz$  mit Ursprung in  $\mathcal{K}$ -Mitte  $M$ ,  $\mathcal{K}$ -Durchmesser  $2r$ , Definition der Normalen  $N$  durch  $\alpha, \beta$ .

**Tab. 1:** Exzentrizitätswerte  $|\Delta(\mathbf{e}')|$  (in  $\mu\text{m}$ ) von elliptischen  $\mathcal{K}$ -Bildern in Abhängigkeit vom Ellipsoiddurchmesser  $2a = 100 \mu\text{m}$  und der  $\mathcal{K}$ -Orientierung  $\alpha^\circ, \beta^\circ$  in 3D. Kamera Nikon D700 mit  $c = 12 \text{ mm}$  und Bildwinkel ca.  $55^\circ$ .

$\alpha^\circ / \beta^\circ$	20/0	40/0	60/0	70/0	20/20	40/40	60/60	70/70
$\mathcal{K}$ -Mitte auf $Z = z'$	0.067	0.103	0.090	0.067	0.086	0.099	0.050	0.024
$\mathcal{K}$ -Mitte am Bildrand	0.238	0.619	1.29	1.63	0.642	1.52	2.06	2.12

habe den Radius  $r$  und mit homogenen  $\mathcal{K}$ -Koordinaten  $\mathbf{x} = [x, y, 1]^T$  und homogener Matrix  $\mathbf{C}$  die Gleichung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \text{ mit } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Es sei nun eine Beziehung zwischen Punkten  $\mathbf{x}$  und ihren Bildpunkten  $\mathbf{x}'$  in Form einer 2D-2D Homographie aufgestellt (mit fünf Parametern und  $c = 1$ ). Man findet sie durch Rotation mit  $\mathbf{R}_M$  und Translation mit  $\mathbf{M}_M$  von  $\mathbf{x}$  nach  $X$  und Perspektivabbildung ins Bildsystem mit  $[\mathbf{I} \ 0]$  zu

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' t' \\ y' t' \\ t' \end{bmatrix} = [\mathbf{I} \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cos \beta & 0 & c X_M \\ \sin \alpha \sin \beta & c \cos \alpha & c Y_M \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

oder

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_M \mathbf{x}.$$

Mit dieser Homographie transformieren wir, vgl. Anhang 7.3, die Kreismatrix  $\mathbf{C}$  ins Bild und erhalten die Ellipse:  $\mathbf{C}' = \mathbf{H}_M^T \mathbf{C} \mathbf{H}_M^{-1}$ . Alles Weitere geschieht mit den Gleichungen (8).

Der Betrag der Exzentrizität  $\Delta(\mathbf{e}')$  hängt dominant von der Ellipsen-Größe ab sowie von der relativen Lage und Orientierung der  $\mathcal{K}$ -Ebene zur Kamera. Natürlich wären überall im Bild die Exzentrizitäten Null, sofern  $\alpha = \beta = 0$  wären. Die Neigungen der  $\mathcal{K}$  spielen also immer eine Rolle. Wir bestimmen die Exzentrizitätsbeträge bei unterschiedlichen Winkeln  $\alpha, \beta$  und berücksichtigen dabei, dass, falls  $\mathcal{K}$  zentrisch auf der Aufnahmeichtung  $Z = z'$  liegt, die Beträge der Exzentrizitäten Symmetrien besitzen (Tab. 1).

Symmetrien der Exzentrizitäten für Ellipsen in Bildmitte:

$$|\Delta \mathbf{e}'(\alpha, \beta)| = |\Delta \mathbf{e}'(\beta, \alpha)| = |\Delta \mathbf{e}'(-\alpha, -\beta)|;$$

projizierte  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}'$  in (mm): in Bildmitte  $[0 \ 0 \ 12]^T$ , am Bildrand  $[17 \ 17 \ 12]^T$ .

Schon beim Ellipsen-Durchmesser von  $100 \mu\text{m}$  hat man Exzentrizitäten, insbesondere am Bildrand, die bei genauen Bündellösungen (Punktmessgenauigkeit bei  $0.2 \mu\text{m}$  (VOSSELMAN & FÖRSTNER 1988, LUHMANN 2010)) nicht vernachlässigbar sind. Im übrigen, Exzentrizitätswerte  $|\Delta \mathbf{e}'|_i$  für andere Ellipsendurch-

messer  $2a_i$  erhält man aus den Tabellenwerten recht gut über die Relation  $|\Delta \mathbf{e}'|_i = (2a_i / 2\alpha)^2 |\Delta \mathbf{e}'|$  bei sonst übereinstimmenden Parametern. Exzentrizitätswerte für beispielsweise  $2a_i = 50 \mu\text{m}$  sind um den Faktor 1/4 kleiner als in der Tabelle, also am Bildrand nicht tolerierbar.

#### 4 Korrespondierende Ellipsen einer Kreismarke in Bildern eines Bildverbands

Es fragt sich nun, wie man eine  $\mathcal{K}$  in der Bündellösung eines Verbandes digitaler Bilder (iterative Gauß-Markov-Schätzung) behandeln sollte. Es werden drei Korrespondenzmodelle für überbestimmte  $\mathcal{K}$  diskutiert und bei allen sei – gewissermaßen als Vorlauf – eine auf “Punkten im weiteren Sinne” (“natürliche Punkte”) gegründete Bündellösung bereits errechnet worden. Unter derartigen “Punkten” versteht man lokale Bildfunktionen mit starken Gradienten, die eine genaue 2D-Lokalisierung ermöglichen, sowie mit individuellen Merkmalen, die das Auffinden von Korrespondenzen in anderen Bildern mit hoher Wahrscheinlichkeit leisten, siehe z. B. den SIFT-Operator (shift invariant feature transform) nach Lowe (2004). Oft begnügt man sich mit dem Ergebnis einer solchen Zuordnung, bleibt damit aber suboptimal.

Die Qualität eines photogrammetrischen Bündelblocks hängt bekanntlich nicht nur von seiner Makrostruktur ab (Zahl und Verteilung von Bildern und Objektpunkten, Bildmaßstäbe, etc.), sondern auch von der Schnittqualität korrespondierender Strahlenbündel und damit von den Korrespondenzmodellen mit der Mikrostruktur der Bilder, repräsentiert durch ihre Pixel. Anders als bei geodätischen Netzen (genaue Standpunkts-/Zielpunkts-Zentrierungen mit festen Marken), kann man die Korrespondenz in photogrammetrischen Netzen – wenn man die Mikrostruktur voll ausschöpfen will – erst im Prozess der Blockausgleichung realisieren; Korrespondenzmodelle stellen somit ein wesentliches Element des Konzepts digitaler Bündelblockausgleichungen dar.

Die weiteren Erörterungen sollen nun an folgender Stelle im Ablauf der Bündellösung beginnen: Die “korrespondierenden Punkte”

des gesamten Bündelverbands seien mit ihrer lokalen Bildumgebung vorhanden. Dabei seien die Kreis-Marken als solche erkannt, ihre Ellipsenpunkte aus den digitalen Grauwerten (Bestrahlungsäquivalente) extrahiert und daraus Ellipsenmatrizen  $\mathbf{C}'$  bestimmt worden. Man habe sodann die vorerst unkorrigierten Ellipsenmitten  $\mathbf{e}'_k$ , siehe (8), in  $1 \dots K$  Bildern in der Bündellösung verwendet. Die Iterationen seien bereits fortgeschritten, so dass grobe Fehler gehoben und recht gute Resultate für den Bildverband erreicht worden seien, also auch die 3D-Koordinaten einer  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$  und ihre Abbildungen  $\mathbf{m}'_k$  in  $K$  Bildern.

Die Genauigkeit dieser Daten ist auch deshalb relativ hoch, weil der Einfluss der noch nicht berücksichtigten Exzentrizitätswerte auf den Bildverband durch die Gaußsche Minimierung reduziert wird. Um die Exzentrizitäten mit Formel (8) bestimmen zu können, fehlt die Normale der  $\mathcal{K}$ -Ebene. Machen wir uns bewusst, die Objektkoordinaten eines Bildverbands sind bei normaler Iteration (die Zielfunktion der “Kleinsten Quadrate” ist dem globalen Minimum bereits recht nahe) eindeutig, also auch die Mitte  $\mathbf{M}$  einer  $\mathcal{K}$  und ihre projizierten Mitten  $\mathbf{m}'_k$ , so dass die  $\mathcal{K}$ -Ebenennormale  $\mathbf{N}$  eindeutig aus Gleichung (3) errechnet werden kann, wegen zufälliger Fehler vorzugsweise als Mittelwert

$$\mathbf{N} = \frac{1}{K} \sum_k \mathbf{C}'_k \mathbf{m}'_k \quad k = 1 \dots K. \quad (11)$$

In (11) müssen die homogenen Summanden normiert sein. Die Normale ist allerdings noch mit kleinen Exzentrizitätsfehlern aus den  $\mathbf{m}'_k$  kontaminiert, die jedoch im Laufe der Folgeiterationen –  $\mathbf{N}$  ist mit (11), (3) über  $\mathbf{m}'_k$  und  $\mathbf{M}$  Teil der Gaußschen Minimierung – gegen Null gehen sollten. Die mehrfachen Lösungen für die  $\mathcal{K}$ -Mitten, siehe (7), finden also im Bildverband eine unproblematische Abklärung; der gezeigte Weg ist einer von mehreren möglichen.

Aufbauend auf die einführende Betrachtung sei nun gezeigt, dass es heutzutage eine Reihe von photogrammetrischen Möglichkeiten gibt, die  $\mathcal{K}$ -Bearbeitung in die Bündellösung zu integrieren, solche, die mit den aus den Bildfunktionen extrahierten geometrischen Merkmalen (Punkte, Kreise, udgl.) ope-



rieren (klassische Bündellösung, siehe KAGER 1981, ANDRESEN 1991), und solche, die die digitalen Bildfunktionswerte (Grauwerte der Pixel) direkt in der Bündellösung verwenden und mittels digitaler Bildinversion die Geometrie-Extraktion mit der Grauwertberechnung der  $\mathcal{K}$  gemeinsam durchführen (GRÜN 1985, WROBEL 1990, SCHNEIDER 1991). Dieser Ansatz ist in der Lage, die statistisch beste Lösung zu erreichen. Beide Möglichkeiten seien im Folgenden skizziert, Vieles existiert bereits. Es sei betont, bei allen Verfahren benötigen wir die Ergebnisse aus den Teilen 2 und 3.

#### 4.1 Korrespondenzmodelle der klassischen Bündellösung

##### 4.1.1 Das Korrespondenzmodell mit $\mathcal{K}$ -Mitten

Wir betrachten im Folgenden wieder nur eine  $\mathcal{K}_c$ , ein Index für sie kann deshalb entfallen. Jede korrigierte Ellipsenmitte  $(\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k$ , siehe (8), steht als Repräsentant für die Ellipse  $k$  im Bilde  $k$  zum Objektpunkt  $\mathbf{M}$ . Für ihre statistische Unsicherheit wird angenommen, dass  $\mathbf{D}(\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k \approx \mathbf{D}(\mathbf{e}'_k)$ ; sie kann durch Varianzfortpflanzung aus  $\mathbf{D}(c'_{ij})_k$  hergeleitet werden, siehe (2). Damit könnte man  $(\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k$  wie jeden üblichen Bildpunkt  $P'$  des Bildverbandes behandeln, d.h. mit den homogenen Kollinearitätsgleichungen (siehe z. B. FÖRSTNER & WROBEL 2004, 222)

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k + \hat{\mathbf{v}}_{e'_k} &= \mathbf{K} \hat{\mathbf{R}}_k \left[ \mathbf{I} \mid -\hat{\mathbf{X}}_{0,k} \right] \hat{\mathbf{M}}; \\ \mathbf{D}(\mathbf{e}'_k) \quad k &= 1 \dots K \end{aligned} \quad (12)$$

in den Bildverband eingliedern, also den  $\mathcal{K}$ -Mittelpunkt  $\hat{\mathbf{M}}$  durch Strahlenschnitt aller seiner  $K$  korrigierten Bildstrahlen  $(\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k$  im Bündelprozess schätzen.

In (12) bedeuten:

$\hat{\mathbf{v}}_{e'_k}$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{e}'_k)$  Zufallsvektor und Dispersionsmatrix von  $\mathbf{e}'_k$   
äußere und innere Orientierung von Bild  $k$ :  
 $\mathbf{K} = [\mathbf{I}]$   $3 \times 3$  Kameramatrix  
 $\hat{\mathbf{R}}_k$  geschätzte Rotationsmatrix  
 $\hat{\mathbf{X}}_{0,k}$  geschätztes Projektionszentrum.

Ansatz (12) umfasst die üblichen neun Parameter, die für die Eingliederung eines Bild-

strahles ins Bündelnetz nötig sind. Die Dispersionsmatrizen können sich von Ellipse zu Ellipse – je nach ihrer Größe – unterscheiden; eine Varianzkomponentenschätzung empfiehlt sich daher. Für die numerische Durchführung der Gauß-Markov-Schätzung muss man die bekannte Linearform von (12) einsetzen. In heutigen Bündelblockprogrammen geht man dabei zu euklidischen Koordinaten über, künftig wäre aber vorteilhafterweise die direkte Verwendung homogener Koordinaten möglich (FÖRSTNER 2010), so dass man auch Fernelemente mit ihren Unsicherheitsmatrizen auf elegante Weise einbeziehen kann.

Die Korrektur  $\Delta(\mathbf{e}')_k$  kann erst im Laufe der Iterationen berechnet werden. Nach erreichter Konvergenz des Bildverbandes unterscheiden sich korrigierte Ellipsenmitte und projizierte  $\mathcal{K}$ -Mitte nur noch durch zufällige Fehler  $\hat{\mathbf{v}}_{e'_k}$

$$(\mathbf{e}' + \Delta(\mathbf{e}'))_k + \hat{\mathbf{v}}_{e'_k} = \hat{\mathbf{m}}'_k. \quad (13)$$

Bei diesem Korrespondenzmodell gehen sämtliche neun Parameter der Beobachtungsgleichungen (12) als Unbekannte in den Bildverband ein. Unbekannte, die nur für die  $\mathcal{K}$  in (12) vorkommen, gibt es nicht. Vorhandene Bündelprogramme kann man also leicht mit der Exzentrizitätskorrektur ausstatten.

Es ist offensichtlich, dass mit der Ellipsenmitte  $\mathbf{e}'_k$  allein nicht das Potenzial, das in den vielen Punkten  $P'_l, l = 1 \dots L_k$ , des Ellipsenrandes steckt, ausgeschöpft wird.  $\mathbf{e}'_k$  ist insofern kein vollwertiger Repräsentant der Ellipse. Volle Repräsentanz wird erst mit dem folgenden Ansatz erreicht. Mit ihm hat man nicht mehr das Exzentrizitätsproblem der Ellipsenmitten, und die statistische Unsicherheit der gesuchten Größen gründet sich direkt auf die der extrahierten Ellipsenpunkte.

##### 4.1.2 Das Korrespondenzmodell mit rekonstruiertem Kreis

In der Tat, die statistische Qualität des Ergebnisses lässt sich steigern, wenn man dieselben Datensätze von Ellipsen, die zu einer  $\mathcal{K}$  gehören, siehe Teile 2 und 4.1.1, einem Korrespondenzmodell Kreis-Ellipse unterwirft: die Randpunkte  $P'_{kl}$  aller Ellipsen  $\mathcal{E}_k$  einer  $\mathcal{K}$  können zur **gemeinsamen  $\mathcal{K}$ -Rekonstruktion** durch Gauß-Helmert-Schätzung herangezogen

gen werden. Der ganze Kreis der  $\mathcal{K}$  mit seiner Normalen ist hier das korrespondierende geometrische Merkmal für die Ellipsen und der rekonstruierte Kreis im Objektraum das Ziel. Damit erreicht man eine optimale Auswertung der **vorhandenen Ellipsendaten**. Statt mehrerer, unabhängiger Ellipsenausgleichungen wie in 4.1.1 hat man hier nur eine einzige und damit bessere Schätzung, die den  $\mathcal{K}$ -Kreis im Raum festlegt, nicht nur seinen Mittelpunkt.

Geometrisch gesehen definiert jede Ellipse  $\mathcal{E}_k$  einen eigenen Kegel. Seine Spitze ist jeweils das Projektionszentrum von Bild  $k$ , seine Mantellinien sind die Abbildungsstrahlen der Ellipsenpunkte. Der Kegel erhält aber nun einen – im Gegensatz zu 4.1.1 – mit allen anderen Kegeln streng gemeinsamen Schnittkreis in der  $\mathcal{K}$ -Ebene. Im Modell zuvor schnitten sich alle korrespondierenden Strahlen der korrigierten Ellipsenmitten  $\mathbf{m}'_k$  gemeinsam in einem Objektpunkt  $\mathbf{M}$ , einem Gebilde mit Dimension 0. Hier nun schneiden und erzeugen damit alle Strahlen korrespondierender Ellipsen einen gemeinsamen Kreis im Objektraum, einem Gebilde der Dimension 1. Es ist eine Aufgabe mit deutlich weniger Parametern und damit höherer Redundanz als in 4.1.1. Die algebraisch-numerische Lösung von 4.1.2 gehört zu den statistischen Standardproblemen, wenige Hinweise ohne Details mögen daher genügen.

Analog zu Teil 3 wird eine 2D-2D Homographie zwischen Punkten  $\mathbf{x}_l$  der  $\mathcal{K}$ -Ebene und ihren korrespondierenden Punkten  $\mathbf{x}'_{k,l}$  im Bild  $k$  angesetzt, die hier über ein Objektkoordinatensystem in beliebiger Lage erreicht wird. Man erhält mit homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x' & t' \\ y' & t' \\ t' & \end{bmatrix}_{kl} = [I \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{X}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_l, \tag{14}$$

mit  $k = 1 \dots K =$  Zahl an Ellipsen für die  $\mathcal{K}$ ,  $l = 1 \dots L_k$ ,  $L_k =$  Zahl an Punkten der Ellipse  $k$  und  $z_l \equiv 0$  für alle  $l$ .

In (14) bewirkt die erste Matrix (von rechts) die Bewegung der Koordinaten  $\mathbf{x}$  der  $\mathcal{K}$ -Ebene ins allgemeine 3D-System XYZ (5 Parameter: die Orientierung der  $\mathcal{K}$  mit  $\alpha, \beta$  in  $\mathbf{R}_{\mathcal{K}}$ , 3D-Mitte  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}}$ ), die zweite Matrix die weitere Bewegung zum Bildkoordinatensystem (6 Parameter: äußere Orientierung des Bildes  $k$ ) und die dritte stellt die Perspektive her. In kompakter Schreibweise lautet die Beziehung

$$\mathbf{x}'_{kl} = \mathbf{H}_{\mathcal{K},k} \mathbf{x}_l, \tag{15}$$

worin  $\mathbf{H}_{\mathcal{K},k}$  unter Berücksichtigung von  $z_l \equiv 0$  das  $3 \times 3$ -Produkt der Matrizen in (14) ist. Da in der  $\mathcal{K}$ -Ebene nur Kreispunkte zugelassen sind, müssen die Punkte  $\mathbf{x}_l$  die Kreisgleichung mit einem Radius-Parameter  $r$  erfüllen, siehe (9). Die unbekannt Parameter in (14) können in einer Gauß-Helmert-Schätzung aus den Bedingungen (9) nach Substitution der Kreispunkte  $\mathbf{x}_l$  durch gemessene Bildpunkte  $\mathbf{x}'_{kl}$ , siehe (16), (17), bestimmt werden

$$\hat{\mathbf{v}}'_{kl} + \mathbf{x}'_{kl} = \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K},k} \mathbf{x}_l; \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}'_{kl}) \tag{16}$$

$$(\hat{\mathbf{v}}'_{kl} + \mathbf{x}'_{kl})^T \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K},k}^{-T} \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{H}}_{\mathcal{K},k}^{-1} (\hat{\mathbf{v}}'_{kl} + \mathbf{x}'_{kl}) = 0 \tag{17}$$

mit

- $\mathbf{x}'_{k,l}$  Messpunkt  $l$  der Ellipse  $k$  zum Kreis  $\mathcal{C}$
- $\mathbf{x}_l$  Kreispunkt korrespondierend zum Bildpunkt  $\mathbf{x}'_{k,l}$
- $\hat{\mathbf{v}}'_{kl}, \mathbf{D}(\mathbf{x}'_{kl})$  Zufallsvektor und Dispersionsmatrix von  $\mathbf{x}'_{k,l}$ .

Die Gesamtzahl an Gleichungen (17) von allen Ellipsen für eine  $\mathcal{K}$  ist,  $\sum L_k$ ,  $k = 1 \dots K$ . Die Parameteranzahl für die  $\mathcal{K}$  allein beträgt sechs (evtl. fünf, falls ihr Radius  $r$  bekannt ist). Hinzu kommen  $6K$  Parameter der äußeren Orientierung der Bilder, in denen die  $\mathcal{K}$  vorkommt. Falls  $r$  tatsächlich gegeben ist, benötigt man zur Bestimmung einer  $\mathcal{K}$  nur eine Ellipse (mit mehr als sechs Punkten; dies ist die algebraische Entsprechung zum Experiment in der Einführung, Abb. 2), sonst zwei, zur Genauigkeitssteigerung eher mehr.

Die Näherungswerte der Parameter für die erforderliche Linearisierung von (17) lassen sich leicht beschaffen: die äußere Orientierung der Bilder und die  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$  liefert die Bündellösung, wenn man wie in 4.1.1 die ers-

ten Iterationen mit den Ellipsenmitten  $e'_k$  beginnt; für die  $\mathcal{K}$ -Normale benötigt man von allen beteiligten Ellipsen  $\mathcal{E}_k$  eigentlich nur eine Matrix  $C'_k$ , woraus mit (3) die Näherung für die Normale und daraus die Winkel  $\alpha, \beta$  folgen. Mit denselben Daten kann man auch eine Näherung für den Radius  $r$  der  $\mathcal{K}$  erhalten. Die Linearisierung von (17) erscheint sehr kompliziert. Jedoch, Linearisierungen können auch relativ leicht numerisch erzeugt werden.

Das Ergebnis dieses Korrespondenzmodells ist die  $\mathcal{K}$ -Mitte zusammen mit Ebenennormale und Kreisradius; für alle kann man die statistische Unsicherheit schätzen. Wie im Modell zuvor ist bei unterschiedlich großen Ellipsen eine Varianzkomponentenbestimmung für die  $\mathbf{D}(\mathbf{x}'_k)$  angebracht. Vorteilhafterweise erreicht man hier eine höhere Redundanz als in Kapitel 4.1.1: Aus derselben Menge an Ellipsenpunkten ist hier nur die gemeinsame  $\mathcal{K}$ -Ebene und ein Kreisparameter zu ermitteln anstelle der Parameter von allen beteiligten Ellipsen. Es ist daher zu erwarten, dass eine  $\mathcal{K}$  mit dem Modell 4.1.2 im Bildverband eine übergeordnete Genauigkeit erreicht. Bei vielerlei Anwendungen würde dies den Absichten entgegenkommen, wenigstens einige Punkte eines Bildverbandes mit Kreismarken zu signalisieren, um die Stabilität zu stärken und/oder mit genauen geodätischen Koordinaten zu verbinden.

Ein Charakteristikum des Modells 4.1.2 soll uns noch beschäftigen. Seine Gleichungen (17) enthalten Unbekannte mit unterschiedlicher Bedeutung für den Bildverband: solche, die nur die Eigenschaften der benutzten  $\mathcal{K}$  modellieren, also eine lokale Aufgabe zu erfüllen haben, und solche, die für den Aufbau des Bildverbandes und seine Stabilität unentbehrlich sind. Die Handhabung von Normalgleichungen der Gaußschen Schätzmethode erlaubt nun, hierauf mit Vorteil zu reagieren. Man kann die Normalgleichungen aus (17) vollständig in das Gesamtsystem des Bildverbandes integrieren oder die lokalen Parameter zuvor durch Gaußsche Eliminationsschritte entfernen, ohne die Strenge der Parameterschätzung und ihrer Genauigkeit zu beeinträchtigen – ein seit dem 19. Jahrhundert bekanntes Verfahren. Eine lokale Rechnung stellt am Ende den Gesamtzusammenhang wieder her. Es liegt nahe, von (17) die  $\mathcal{K}$ -Mitte

$\mathbf{M}$  mit den Orientierungsparametern von Bild  $k$  ins Gesamtsystem einzufügen, die anderen zu eliminieren. Der Punkt  $\mathbf{M}$  ist daher als ein vollwertiger, starker Repräsentant der Ellipsen anzusehen. Dann ist man eigentlich wieder recht nahe beim ersten Korrespondenzmodell angelangt, siehe 4.1.1, aber mit viel besseren Eigenschaften.

#### 4.2 *Statistisch optimale Bündellösung mit Pixel-Bündeln durch gemeinsame Rekonstruktion der $\mathcal{K}$ -Geometrie und ihrer Helligkeitsfunktion*

Die bisher diskutierten Korrespondenzmodelle der klassischen Bündellösung 4.1.1 und 4.1.2 gehen von Ellipsenpunkten aus. Jedoch, sie stellen bekanntlich keine Originalmessdaten dar, sondern mussten erst durch lokale Schätzungen aus den digitalen Bildfunktionen abgeleitet werden, auch ihre a priori Standardabweichungen. Etwa seit den 1975er Jahren gibt es Vorschläge, die Methoden und Aufgaben der Photogrammetrie direkt mit den originalen Bildgrauwerten zu lösen (Überblicke in LUHMANN 2010, TRIGGS et al. 2000, McGLONE et al. 2004). Von Anfang an spielten die Kleinste-Quadrate-Zuordnungen eine besondere Rolle, zunächst von Bild zu Bild, z. B. GRÜN (1985). Seit 1985 gibt es den Vorschlag, sie konsequent als **digitale Inversion der Bildentstehung** vom Bild zurück zum Objekt anzusetzen, d.h. Rückprojektion aller Pixel-Grauwerte entlang ihrer Abbildungsstrahlen auf ein gemeinsames Rekonstruktionsmodell von Geometrie und Helligkeit des Objekts und Optimierung der Modellrechnung mit der Kleinste-Quadrate-Methode. Darin werden nicht mehr die zufälligen Fehler von Bildkoordinaten der extrahierten Bildpunkte minimiert, sondern die Zufallskomponenten  $v_{g(\mathbf{x}')}$  der originalen Bildgrauwerte  $g(\mathbf{x}')$ . Näheres in WROBEL (1985/86), WROBEL (1987), SCHLÜTER (1999a) und SCHLÜTER (1999b) mit Verallgemeinerungen, topographischen Anwendungsbeispielen und vielen Referenzen. Mit der Leistungsfähigkeit der heutigen Computertechnik kann man diese direkten, aber aufwendigeren Wege gehen mit Vorteilen für die Automation und Qualität der Verfah-

ren. In der Tat, seit einiger Zeit befasst man sich erneut intensiv mit derartigen Ansätzen in großer Allgemeinheit und Vielfalt, siehe z. B. STRECHA (2007), vor allem CREMERS et al. (2010).

Die geometrische Anschauung zum Korrespondenzmodell hier unterscheidet sich fundamental von den anderen, da sie ausschließlich über die originalen Bildgrauwerte gebildet wird. Es sei unterstellt, dass eine  $\mathcal{K}$  sich auf einer quadratischen Ebene befindet (Abb. 1), die in den Bildern  $k$  je in ein anderes Viereck übergeht. Die Abbildungsstrahlen aller Pixel eines Vierecks (es sei Pixel-Bündel genannt) stellen eine "gefüllte Pyramide" dar, ihre Spitze liegt im Projektionszentrum des Bildes  $k$ . Das Ziel hier besteht darin, dass alle Pyramiden  $k = 1 \dots K$  einer  $\mathcal{K}$  eine streng gemeinsame  $\mathcal{K}$  im Objektraum rekonstruieren, mit identischen Oberflächenhelligkeiten und identischer Geometrie, unter der Gaußschen Minimumsbedingung bestmöglich aus allen Bildgrauwerten einer  $\mathcal{K}$  geschätzt. Die Gleichheit von Bildgrauwerten (nach lokaler linearer Anpassung) mit geometrisch korrespondierenden Objektgrauwerten ist also das Prinzip. Korrespondenz, auf diesem Wege erzeugt, verwendet alle vorhandenen, ursprünglichen Messdaten. Im Vergleich zu den Korrespondenzmodellen zuvor hat das hier erzeugte Korrespondenzgebilde im Objektraum, die Helligkeitsfunktion und die Geometrie des Objekts, die Dimension 2.

Der Ansatz eines derartigen Korrespondenzmodells sei nun aufgezeigt (KRAUT & WROBEL 1993). Nur schwarz-weiß Bilder werden behandelt. Es besteht aus drei klar unterscheidbaren Modellen: der optisch-photographischen Bildentstehung (bei kleinen Objekten in starker Vereinfachung meist hinreichend), der Objektoberfläche und ihrer Helligkeitsfunktion. Im Falle einer  $\mathcal{K}$  hat man bereits einige Kenntnis über das zu rekonstruierende Objekt: die Helligkeitsfunktion hat eine sehr einfache Struktur (Parameter  $G_1, G_2$ , Kreisradius  $r, s$  für die PSF (Punktstreufunction); siehe Abb. 1 und Anhang 7.4), die Geometrie besteht aus der Trägerebene (fünf Parameter). Es gilt daher die Geometrie und die Näherungswertbeschaffung wie in 4.1.2. Die Rückprojektion der Bildgrauwerte geschieht sodann auf eine vorerst nur ungenau bekannt

te  $\mathcal{K}$ -Ebene mit ebensolchen Objektgrauwerten  $G$ . Der Zusammenhang der Bildgrauwerte mit den Änderungen aller Parameter des Korrespondenzmodells wird in einer Taylorreihe erreicht und die finale Lösung kann per Newton-Gauß-Iteration gefunden werden, vorausgesetzt die Näherungswerte befinden sich im Konvergenzkreis der Lösung.

Im Folgenden gehen wir von homogenen zu euklidischen Koordinaten über. Beispielsweise wird aus  $\mathbf{x}' = [x',y',t']^T$  der euklidische Vektor  $\mathbf{x}' = [x',y']^T$ . Die Beziehung zwischen Punkten  $\mathbf{x} = [x,y,1]^T$  der  $\mathcal{K}$  und ihren Bildpunkten  $\mathbf{x}'$ , siehe (15), lautet nunmehr

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{K,k,1}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{h}_{K,k,2}^T \mathbf{x} \end{bmatrix} / \mathbf{h}_{K,k,3}^T \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}_{\mathcal{K},k} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \end{bmatrix}_{\mathcal{K},k} \quad (18)$$

Wir betrachten die Pixel einer  $\mathcal{K}$  im Bilde  $k$ . Der Bildstrahl  $l$  des Pixels  $\mathbf{x}'_{kl}$  mit Grauwert  $g'_{kl}$  trifft die  $\mathcal{K}$ -Ebene im Punkt  $x_{kl}$ . Bei fehlerfreien Daten und einer  $\mathcal{K}$  mit matter Oberfläche (Lambertstrahler) gelte zunächst folgende lineare Beziehung als Approximation des strahlungsphysikalischen Reflexions- und Sensorverhaltens

$$h'_{0,k} + h'_{1,k} g'(\mathbf{x}'_{kl}) = G(\mathbf{x}) \quad l = 1 \dots L_k \quad (19)$$

mit sechs Parametern

- $h'_{0,k}, h'_{1,k}$  Parameter für den Transfer der  $g'_{kl}$  in die  $G_l$  auf  $\mathcal{K}$ , gültig für die Pixel  $l = 1 \dots L_k$  des  $\mathcal{K}$ -Bildes  $k$
- $G(\mathbf{x})$   $G(\mathbf{x})$  besteht aus drei Bereichen mit vier unbekannt Parametern, siehe Anhang 7.4.

Die Bildgrauwerte  $g'(\mathbf{x}')$  sind jedoch Messdaten mit einer stochastischen Komponente  $v_g(\mathbf{x}')$ , und die Parameter der Abbildungsmatrix  $\mathbf{H}_{\mathcal{K},k}$  und von  $G(\mathbf{x})$  sind vorerst nur approximativ bekannt. Der Gesamtzusammenhang wird mit folgender Taylorreihe von (19), entwickelt nach den unbekannt Parametern  $p_i$  in  $\mathbf{H}_{\mathcal{K},k}$  und  $G(\mathbf{x}_l)$ , dargestellt

$$\hat{h}'_{0,k} + \hat{h}'_{1,k} \{g'(\mathbf{x}'_{kl}) + \hat{v}_{g'}(\mathbf{x}'_{kl})\} = \hat{G}(\mathbf{x}_l) + \sum_{i=1}^{15} (d\hat{G}(\mathbf{x}_l) / d\mathbf{x}_{kl}) d\mathbf{x}_{kl} / d\hat{p}_{k,i} d\hat{p}_{k,i}; \mathbf{D}(g'(\mathbf{x}'_{kl})), \quad (20)$$

mit

$l = 1 \dots L_k$   $L_k =$  Pixelzahl der  $\mathcal{K}$  im Bilde  $k$

$i = 1 \dots 15$   $d\hat{p}_i =$  geschätzte Änderungen der  $\hat{p}_i$ : 11 in  $\mathbf{H}_{\mathcal{K},k}$  (fünf für die  $\mathcal{K}$  sowie sechs für die äußere Orientierung von Bild  $k$ ) und vier in  $\hat{G}(\mathbf{x}_l)$

$\hat{v}_{g'}(\mathbf{x}'), \mathbf{D}(g'(\mathbf{x}'_{kl}))$  Zufallskomponente und Dispersionsmatrix von  $g'(\mathbf{x}'_{kl})$ .

Die unbekannt Parameter in (20) sind in Iterationen zu verbessern:  $\hat{p}_i + d\hat{p}_i \rightarrow \hat{p}_i$  bis  $d\hat{p}_i \rightarrow 0$ . Dann ist der Summenterm von (20), rechts, verschwunden und man ersieht unmittelbar die hier gültige Korrespondenz. Wie zuvor in 4.1 wird auf die Wiedergabe der Linearform zum Modell (20) verzichtet.

Die Parameterzahl 17 in den  $\mathcal{K}$ -Gleichungen (20) eines Bildes hat im Hinblick auf die im Allgemeinen sehr hohe Pixelzahl eine Redundanz zur Folge, mit der das stochastische Modell der Bildgrauwerte sich auf einer sicheren Basis befindet. Es wird betont, dass bei diesem Modell sämtliche Pixel der abgebildeten  $\mathcal{K}$ -Bereiche die Modellparameter mitbestimmen und nicht etwa nur eine Auswahl wie in den Modellen zuvor. Hervorzuheben ist ferner, dass es hier eine einzige statistische Schätzung gibt und zwar mit den Originalmesswerten. Eine Folge von Schätzungen wie zuvor in 4.1 ist in der Regel mit Verlusten von Korrelationen verbunden. Das Korrespondenzmodell mit Pixelbündeln wird daher als optimal angesehen.

Da es die  $\mathcal{K}$ -Geometrie wie in 4.1.2 besitzt, also mit der  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$ , kann man hier wie dort die gleiche Strategie zum effizienten Aufbau des Bildverbandes (Bündelnetzaufbau) benutzen, d.h. einen relativ hohen Aufwand für eine möglichst realistische Modellierung der  $\mathcal{K}$ -Korrespondenzen betreiben, die Auflösung des Gesamtsystems des Bildverbandes

aber damit nicht belasten. Aus den Normalgleichungen einer  $\mathcal{K}$  aus einem Bild kann man die Transferparameter  $h_0, h_1$  sofort reduzieren, die Gleichungen der vier G-Parameter und der Normalen  $\mathbf{N}$  erst, wenn alle Bilder, die dieselbe  $\mathcal{K}$  enthalten, ausgewertet wurden.  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{M}$  und Orientierungsparameter von Bild  $k$  gehen ins Gesamtsystem ein. An allen diesen Eigenschaften müssen sich andere Modelle zum Aufbau von Bündelblöcken messen lassen.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Der Artikel befasst sich mit abgebildeten Kreismarken ( $=\mathcal{K}$ ) im Einzelbild und im Bildverband, ausgehend von kalibrierten Digitalbildern, und bestimmt die Exzentrizität der projizierten Kreismitte von der zugehörigen Ellipsenmitte. Der Schwerpunkt liegt in der Herleitung von mathematischen Grundbeziehungen; Verfeinerungen und Ausbau zu rationalen Verfahren für konkrete Anwendungen bleiben offen, sollten aber mit den vorgelegten Ergebnissen möglich sein.

In den Teilen 1 bis 3 wird die Exzentrizität der projizierten  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}'$  von der  $\mathcal{K}$ -Ellipsenmitte  $\mathbf{e}'$  hergeleitet und erläutert. Die Beziehungen beruhen auf der Polarität zwischen  $\mathbf{m}'$  und der  $\mathcal{K}$ -Normalen  $\mathbf{N}$  in Bezug auf die  $\mathcal{K}$ -Ellipse  $\mathbf{C}'$ . Mit Hilfe einer SVD der Ellipsenmatrix erhält man die zwei Lösungen für  $\mathbf{m}'$ , also allein aus den Ellipsendaten. Wegen der Strenge der Lösung kann man auch große  $\mathcal{K}$  verwenden, deren Ellipsen aus mehr Bildpunkten genauer bestimmbar sind als kleine Ellipsen, und die insbesondere als Elemente von Industrieobjekten oder in Bildern von Tiefbefliegungen über Städten oder in Nahaufnahmen von Gebrauchsgegenständen aus heutiger oder historischer Zeit vorkommen können. Im Teil 4 wird die Behandlung von  $\mathcal{K}$  im Verfahren der Bündelausgleichung dargestellt. Die Mehrfachlösungen für die projizierte  $\mathcal{K}$ -Mitte  $\mathbf{m}'$  erfahren unter dem Minimierungseinfluss der Gaußschen Methode der Kleinsten Quadrate eine unproblematische Abklärung.

Das eigentliche Thema von Teil 4 ist der Frage gewidmet, welches Korrespondenzmodell einer  $\mathcal{K}$  im Bildverband aktuell angemessen

sen ist. Es werden drei Modelle diskutiert, von einfach und reduziert genau bis zu aufwendig und optimal genau. Sie ermöglichen es, den sehr unterschiedlichen praktischen Bedürfnissen gerecht zu werden. Die beiden ersten stehen – nach der Ellipsenextraktion – ausschließlich auf dem Boden der projektiven Geometrie und verwenden die extrahierten Ellipsenpunkte einer  $\mathcal{K}$  in den Bildern: aus den Ellipsenmitten wird nur die  $\mathcal{K}$ -Mitte im Objektraum bestimmt bzw. die Punkte aller Ellipsen legen gemeinsam – d.h. genauer, robuster – die ganze  $\mathcal{K}$  im Objektraum fest.

Das dritte Modell verfolgt das Ziel, den Bildverband aus den Originalbilddaten direkt auf geometrisch-strahlungsphysikalischer Grundlage der Bilderzeugung wieder herzustellen. Es wird durch digitale Bildinversion direkt die  $\mathcal{K}$  im Objektraum rekonstruiert: ihre Geometrie und ihr Helligkeitsverlauf. Das Pixelbündel, das zu einer Ellipse samt lokaler Umgebung gehört, wird komplett herangezogen. Damit ist eine maximale Informationsausnutzung und Genauigkeit erreichbar. Es darf dabei nicht übersehen werden, dass dies alles mit einer Kombination von merkmalsbasierter Bündellösung mit anschließender Pixelbündel-Lösung zu geschehen hat. Die erste bewältigt die gewiss nicht leichte Aufgabe der Näherungswertbeschaffung (Objektpunkte, Orientierungsdaten, Neigungswinkel von  $\mathcal{K}$ -Ebenen, ...), die zweite schöpft das hohe relative Positionierungspotenzial digitaler Bilder aus.

Der Artikel hat sich auf Modelle zur Verarbeitung von Kreismarken in der Bündellösung eines Bildverbandes konzentriert. Kreismarken sind zwar eine spezielle Punktverkörperung, dennoch ist das Korrespondenzmodell mit Pixelbündeln mit allen Eigenschaften auf allgemeine Punktdefinitionen (“natürliche Punkte”, “key points”) übertragbar und damit auf die heute am häufigsten in Bildverbänden vorhandene Punktart. Die aktuellen Verfahren zur Auffindung natürlicher Punkte sind sehr weit entwickelt und erprobt worden und sind bereits auf recht allgemeine Objekte des Nahbereichs anwendbar. Dies gilt für die Deskriptoren von Merkmalen (LOWE 2004) und auch für ihren Zuordnungsprozess, der zunehmend robuster wird (DICKSCHEID 2011). Die dabei auftretenden “Punkte” benötigen

im Korrespondenzmodell für die Oberflächen-Geometrie und -Helligkeit (anders als bei einer  $\mathcal{K}$ ) flexible Freiformansätze, bestehend aus Facetten (Maschen) in angemessener Dichte. Die erfolgreiche Handhabung solcher Ansätze ist mit dem Facetten-Stereosehen bereits untersucht worden (KEMPA 1995, SCHLÜTER 1999a, b).

Damit könnte die Bündellösung von Bildverbänden, eine schon lange etablierte Methode, eine günstige Weiterentwicklung erfahren. Aus dem klassischen Bündelblock, bestehend aus der Gesamtheit von Strahlen zu Objektpunkten, entstünde ein Block von Pixelbündeln je zur lokalen Umgebung von Objektpunkten. Der Aufwand für die Pixelbündellösung ist sicherlich größer, aber die Methode ist in vielerlei Hinsicht zeitgemäß.

## 6 Literatur

- ANDRESEN, K., 1991: Ermittlung von Raumelementen aus Kanten im Bild. – Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung **1991** (6): 212–220.
- CREMERS, D., GOLDLÜCKE, B. & POCK, T., 2010: Variational Methods in Computer Vision. – Tutorial, 11th European Conference on Computer Vision, Heraklion, Kreta.
- DICKSCHEID, T., 2011: Robust Wide-Baseline Stereo Matching for Sparsely Textured Scenes. – Dissertation Uni Bonn.
- D'HOME, M., LAPRESTEL, J.T., RIVES, G. & RICHTIN, M., 1990: Spatial localization of modelled objects of revolution in monocular perspective vision. – ECCV 1, 1990. – GOOS, G. & HARTMANIS, J. (eds.): Lecture notes in computer science **427**: 475–485, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- DOLD, J., 1997: Ein hybrides photogrammetrisches Industriemeßsystem höchster Genauigkeit und seine Überprüfung. – Dissertation, Universität der Bundeswehr, München, Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen, Heft **54**.
- FÖRSTNER, W., 2010: Minimal Representations for Uncertainty and Estimation in Projective Spaces. – Asian Conference on Computer Vision **II**: 619–633, Queenstown, New Zealand.
- FÖRSTNER, W. & WROBEL, B., 2004: Basic image geometry. – McCLONE, J.CH., MIKHAIL, E. & BETHEL, J. (eds.): Manual of Photogrammetry. – 5th edition, 211 p., American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Bethesda (ML), USA.

- FÖRSTNER, W. & WROBEL, B. (in Vorbereitung): Photogrammetric Computer Vision, vol. 1: Geometry and Orientation.
- FORSYTH, D., MUNDY, J.L., ZISSERMAN, A., COELHO, C., HELLER, A. & ROTHWELL, C., 1991: Invariants descriptor for D object recognition and pose. – IEEE transactions on PAMI **13**: 971–991.
- GRÜN, A., 1985: Adaptive least squares correlation – a powerful image matching technique. – South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography **14** (3): 175–187.
- KAGER, H., 1981: Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren. – Dissertation, Technische Universität Wien, Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 19.
- KANATANI, K., 1993: Geometric Computation for Machine Vision. – Clarendon Press, Oxford.
- KEMPA, M., 1995: Hochaufgelöste Oberflächenbestimmung von Natursteinen und Orientierung von Bildern mit dem Facetten-Stereosehen. – Dissertation TH Darmstadt, Institut für Photogrammetrie und Kartographie, Darmstadt.
- KRAUT, A. & WROBEL, B., 1993: Target localization by least-squares image matching including deconvolution of image blur. – Conf. Optical D Measurement Techniques, Oct. 1993, Zürich, Switzerland.
- LOWE, D.G., 2004: Distinctive image features from scale-invariant keypoints. – Intern. Journal of Computer Vision **60** (2): 91–110.
- LUHMANN, T., 2010: Nahbereichsphotogrammetrie – Grundlagen, Methoden und Anwendungen. – 3. Auflage, Wichmann Verlag, Berlin, Offenbach.
- MCGLONE, J.C., MIKHAIL, E.M. & BETHEL, J.S. (eds.), 2004: Manual of Photogrammetry. – 5th edition, American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Bethesda(MD), USA.
- PHILIP, J.S., 1997: An algorithm for determining the position of a circle in  $d$  from its perspective  $d$  projection. – Technical report TRITA-MAT-1997-MA-1, Department of Mathematics, KTH (Royal Institute of Technology), Stockholm.
- SCHLÜTER, M., 1999a: Von der D- zur D-Flächenmodellierung für die photogrammetrische Rekonstruktion im Objektraum. – Dissertation TU Darmstadt, Deutsche Geodätische Kommission C (506), München.
- SCHLÜTER, M., 1999b: Automatische Oberflächenrekonstruktion durch digitale Bildzuordnung, eine Zusammenstellung von drei Beiträgen. – Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 4, Frankfurt/Main.
- SCHNEIDER, C.T., 1991: Objektgestützte Mehrbildzuordnung. – Dissertation TU Braunschweig, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C (375).
- STRECHA, C., 2007: Multi-View Stereo as an Inverse Inference Problem. – Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven.
- TRIGGS, B., McLAUCHLAN, P.F., HARTLEY, R.I. & FITZGIBBON, A.W., 2000: Bundle adjustment – a modern synthesis. – TRIGGS, B., ZISSERMAN, A. & SZELISKI, R. (eds.): Vision algorithms, theory and praxis. – Lecture Notes in Computer Science, **1883**, Springer Verlag, Berlin New York.
- VOSSELMAN, G. & FÖRSTNER, W., 1988: The Precision of a Digital Camera. – ISPRS 16th Congress: 148–157, Kyoto.
- WROBEL, B., 1985/1986: Studie über die digitale Bildinversion zur Rekonstruktion von Objektraummodellen (Oberflächen von Objekten, Bündellösung mit dem Facetten-Stereosehen). – Institut für Photogrammetrie und Kartographie, TH Darmstadt, unveröffentlicht.
- WROBEL, B., 1987: Digitale Bildzuordnung durch Facetten mit Hilfe von Objektraummodellen. Einige Überlegungen über die theoretischen Grundlagen der digitalen Photogrammetrie. – Zeitschrift für Bildmessung und Luftwesen **55** (3): 93–101, **55** (4): 129–140.
- WROBEL, B., 1987: Digital image matching by facets using object space models. – Intern. Symposium on Optical and Optoelectr. Science and Engineering, 30 March – April, The Hague (NL) 1987. – OSTERLINCK, A. & TESCHER, A.G. (eds.): Advances in Image Processing. Proceedings SPIE **804**: 325–334.
- WROBEL, B., 1990: Zentrumsbestimmung von Punktsignalen mit digitaler Bildverarbeitung. – Festschrift Prof. Dr. mult. G. KONECNY zum 60. Geburtstag, Universität Hannover, Institut für Photogrammetrie und Ingenieurvermessung.

## 7 Anhang

### 7.1 Normale $N$ der $\mathcal{K}$ -Ebene im Objektraum und ihre Ferngerade im Bildraum

Es existiere ein  $XYZ$ -System im Projektionssystem  $O$  mit  $XY$  parallel zu  $x', y'$  in der Bildebene, Kamerakonstante sei  $c = 1$ , so dass  $X = x' / Z, Y = y' / Z$ . Die Trägerebene einer  $\mathcal{K}$  im Objektraum sei definiert durch ihre Normale  $N = [N_1 \ N_2 \ N_3]^T$  und den beliebigen festen Punkt  $P^* (X^*, Y^*, Z^*)$ , also gilt für jeden Punkt  $X$  der Ebene

$$N^T [X - X^*] = 0 \quad \text{oder} \\ N_1 (X - X^*) + N_2 (Y - Y^*) + N_3 (Z - Z^*) = 0. (21)$$

Wir bilden Punkte  $X, Y, Z$  der  $\mathcal{K}$ -Ebene in ihre Bildpunkte  $x', y'$  ab und erhalten

$$N_1x' + N_2y' + N_3 = (N_1X^* + N_2Y^* + N_3Z^*) / Z. \quad (22)$$

Lässt man  $Z$  gegen Unendlich gehen, folgt daraus das Bild der Ferngeraden der  $\mathcal{K}$ -Ebene

$$N_1x' + N_2y' + N_3 = 0 \quad \text{oder} \quad N^T\mathbf{x}' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{l}'_∞^T\mathbf{x}' = 0. \quad (23)$$

$\mathbf{l}'_∞$  ist nicht abhängig von  $P^*$ , sondern nur von  $N$ . Man kann also die Normale  $N$  der  $\mathcal{K}$ -Ebene im Objektraum direkt aus dem Parametervektor  $\mathbf{l}'_∞$  ihrer Ferngeraden im Bild erhalten.

Im Übrigen, auch aus der Perspektive des Quadrats der  $\mathcal{K}$  kann man die Ferngerade seiner Trägerebene direkt (aus den Fernpunkten gegenüber liegender Quadratseiten) herleiten.

## 7.2 Die Polare zur Ellipsenmitte als Pol

Der Mittelpunkt  $[\mathbf{x}_0, 1]^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{hh}^{-1}\mathbf{c}_{h0}, 1 \\ \mathbf{C}_{hh} & \mathbf{c}_{h0} \\ \mathbf{c}_{0h} & c_{00} \end{bmatrix}$   
der Ellipse  $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{hh} & \mathbf{c}_{h0} \\ \mathbf{c}_{0h} & c_{00} \end{bmatrix}$ ,

wird in die Polargleichung  $\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  eingesetzt und ergibt  $[0 \ 0 \ \mathbf{C}^*]^T \sim [0 \ 0 \ 1]^T = \mathbf{l}'_∞$ , worin  $\mathbf{C}^* = c_{00} - \mathbf{c}_{h0}^T\mathbf{C}_{hh}^{-1}\mathbf{c}_{h0}$  eine skalare Konstante ist. Also: Die Polare des Mittelpunktes einer Ellipse ist die Ferngerade ihrer Ebene.

## 7.3 Projektive Invarianz von Polaritäten

Eine beliebige, reguläre Polarität  $\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  mit Polare  $\mathbf{l}$ , Pol  $\mathbf{x}$ , Ellipsenmatrix  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  wird einer regulären Homographie mit der  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{H}$  unterworfen. Es ist zu prüfen, ob die Polare  $\mathbf{l}$  in Bezug auf  $\mathbf{C}$  abgebildet wird auf die Polare  $\mathbf{l}'$  in Bezug auf  $\mathbf{C}'$ . Beliebige Punkte  $\mathbf{x}$  bzw. Geraden  $\mathbf{l}$  werden projektiv mit  $\mathbf{H}$  transformiert in

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad \mathbf{l}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}. \quad (24)$$

Ferner ergibt sich zunächst für die transformierte Ellipsenmatrix

$$\mathbf{C}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}. \quad (25)$$

Dies folgt mit Anhang 7.1 aus der Ellipsengleichung  $\mathbf{x}'^T\mathbf{C}'\mathbf{x}' = 0$ . Für die Polare im Bild erhalten wir  $\mathbf{l}' = \mathbf{C}'\mathbf{x}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}$ .

Dies ist die gesuchte Bestätigung. Die Pol – Polare – Relation in Bezug auf eine Ellipse ist also bei projektiven Transformationen invariant.

## 7.4 $\mathcal{K}$ -Bestimmung durch digitale Bildinversion mit gefaltetem Grauwertsprung

Optische Bildfunktionen gehen aus zugehörigen Objektfunktionen durch die Perspektive hervor einschließlich einer Tiefpassfilterung (Faltungsintegral). Letztere ist charakterisiert durch das Punktbild oder die Punktstreuung (=PSF) der Kamera. Bereits mit der stark vereinfachten PSF als isotrope Rechteckfunktion ( $2s =$  Basis,  $1/(2s) =$  Höhe) wird aus dem Grauwertsprung zwischen  $G_1$  und  $G_2$  durch die Faltungsoperation eine lineare Funktion erzeugt. Die Breite des Übergangs und die Basis der PSF sind einander gleich. Die Parameter sind zu bestimmen aus den Pixel-Grauwerten der  $\mathcal{K}$  in allen Bildern. Das Grauwertprofil  $G(t)$  von der  $\mathcal{K}$ -Mitte bis an den  $\mathcal{K}$ -Rand lautet damit (KRAUT & WROBEL 1993)

$$G(t) = G_1 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq r - s$$

$$G(t) = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) - \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \frac{t - r}{s}$$

für  $r - s \leq t \leq r + s$

$$G(t) = G_2 \quad \text{für} \quad r + s < t$$

Die vier Parameter der Helligkeitsfunktion der  $\mathcal{K}$  sind  $G_1, G_2, \mathcal{K}$ -Radius  $r$  und  $s$  für die PSF.

Es gilt ferner für (20):  $dG/dx = (dG/dt)(dt/dx)$  mit den Polarkoordinaten  $t, \varepsilon$  von  $\mathbf{x} = [t \cos \varepsilon, t \sin \varepsilon]^T$ .

Anschrift des Autors:

Prof. Dr.-Ing. BERNHARD P. WROBEL, TU Darmstadt, zurzeit Gast bei der Professur Photogrammetrie, Prof. Dr. mult. W. FÖRSTNER, Universität Bonn. Privat: Im Saufang 10, D-53343 Wachtberg, e-mail: wrobel.bernhard@t-online.de

Manuskript eingereicht: Januar 2012

Angenommen: März 2012